

Prof.Dr.-Ing.B.Wrobel und Dipl.-Ing.D.Klemm
Institut für Photogrammetrie und Kartographie der Technischen Hochschule Darmstadt
Federal Republic of Germany, Commission III

1. Einführung

Der Ansatz der photogrammetrischen Punktbestimmung nach der Bündelmethode enthält u.a. die Parameter einer räumlichen Drehung für jedes Strahlenbündel. Räumliche Drehungen lassen sich - SCHUI 1958, THOMPSON 1959, RINNER u.a. 1972, TIENSTRA 1974 - auf sehr viele verschiedene Weisen parametrisieren. Bei näherer Betrachtung ergibt sich jedoch, daß für die bisher bekannten Parametersätze schlecht konditionierte oder sogar singuläre Bündelblock-Normalgleichungen auftreten, wenn der Allgemeinfall räumlicher Drehungen ausdrücklich zugelassen werden muß. Die Anwendungen der analytischen Photogrammetrie in der Industrie und in der Bauaufnahme liefern dafür viele Beispiele.

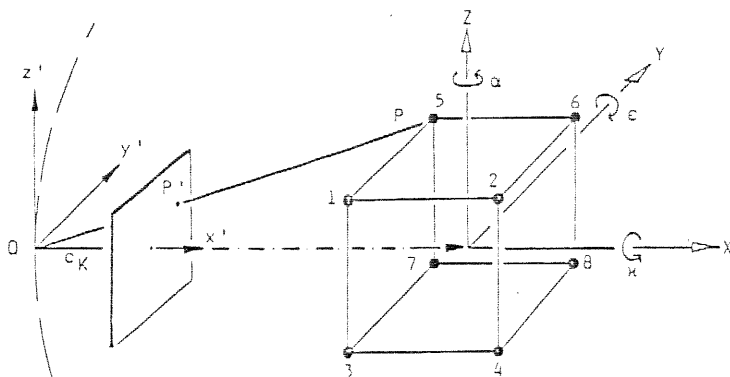
Eine bekannte Parametrisierung stellen die Drehungen um die drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems dar. Bei kleinen Drehwinkeln - wie in der Luftbildmessung vorkommend - gibt es überhaupt keine Probleme. Erreicht jedoch die Sekundärdrehung eines Bildes Winkel von $\pm 90^\circ$, z.B. bei Zenitaufnahmen mit einer terrestrischen Meßkammer, so werden die Normalgleichungen des Bündelblocks singulär. Als Abhilfe - gedacht für ein universelles Computerprogramm - wurde erst kürzlich empfohlen, in solchen Fällen auf eine Drehmatrix mit anderer Reihenfolge der Drehungen überzugehen oder von Anfang an nur die Rodrigues-Matrix zu verwenden, mit der derartige Probleme überhaupt nicht auftauchen sollen. Während die erste Empfehlung bei sinnvoller Kombination von zwei Drehmatrizen durchaus erfolgreich ist - wie sich zeigen wird -, kann die Rodrigues-Matrix für den Allgemeinfall keineswegs empfohlen werden, worauf schon THOMPSON 1959 hingewiesen hat.

Es ist daher angebracht, die Parametrisierung einer Drehmatrix für den Allgemeinfall räumlicher Drehungen zu überprüfen und wirklich alle Parametersätze festzustellen, mit denen singuläre Fälle verbunden sind. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit als erstes und zwar für die bekannt gewordenen Drehmatrizen der Photogrammetrie. Danach werden Lösungen zur Überwindung der Problematik angegeben, insbesondere die sehr einfache und universelle Lösung mittels Doppelrotation der Bilder.

Im Übrigen, die hier diskutierten Ergebnisse gehen aus der Diplomarbeit von Herrn Dipl.-Ing. D.KLEMM hervor.

2. Die Untersuchungsmethode

Das Aufbauelement von Bündelblöcken ist das einzelne Meßbild. Es genügt deshalb für das vorgelegte Ziel, die Normalgleichungen des räumlichen Rückwärtsschnittes mit den 9 Parametern der inneren und äußeren Orientierung als Unbekannte zu untersuchen. Als Untersuchungsmethode beschreiben wir weitgehend empirische Wege: Die Normalgleichungen werden für ein konkretes Paßpunktfeld bei unterschiedlicher äußerer Orientierung der Bilder, Figur 1, aufgestellt und untersucht.



Figur 1: Drehwinkel, Aufnahmeorte O, Paßpunkte 1-8, Kantenlänge des Würfels 10 m, Kugelradius 20 m

Als Indikatoren bzw. Maßzahlen für die Stabilität der Normalgleichungen verwenden wir die Korrelationen zwischen den Parametern sowie die spektrale Konditionszahl. Wie sich hierbei zeigte, eignen sich die Korrelationen sehr gut, um keine kritischen Fälle zu übersehen, und die Konditionszahl, um sie sehr präzise im Parameterraum der Drehparameter zu lokalisieren.

Das Paßpunktfeld besteht aus den acht Ecken eines Würfels, Figur 1. Sein Mittelpunkt ist zugleich Mittelpunkt einer Kugel, auf dessen Oberfläche die Projektionszentren der untersuchten Bilder sich befinden. Die Aufnahmerichtungen sind stets auf den Koordinatenursprung gerichtet. Die Kammerkonstante wurde zu $c_K = 0,1$ m angenommen. Die Gesamtzahl der untersuchten Bilder auf der Kugel wurde durch die Winkel des als Standard angenommenen Systems festgelegt:

Drehung um mitbewegte Achsen

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{Primärdrehung:} & \alpha &= -180^\circ (10^\circ) + 180^\circ \\ \epsilon &= \text{Sekundärdrehung:} & \epsilon &= -90^\circ (10^\circ) + 90^\circ \\ \kappa &= \text{Tertiärdrehung:} & \kappa &= -180^\circ (10^\circ) + 180^\circ \end{aligned}$$

Damit wird der für die praktische Photogrammetrie relevante Parameterraum vollständig überprüft. In der Nähe singulärer Stellen wurde eine viel feinere Winkelabstufung vorgenommen.

Es seien: *)

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (X, Y, Z)^T && \text{Objektkoordinaten eines Paßpunktes} \\ \underline{x}_0 &&& \text{Objektkoordinaten des Projektions-} \\ &&& \text{zentrums eines Bildes} \\ \underline{p} &&& \text{Vektor von } J \text{ unabhängigen Dreh-} \\ &&& \text{parametern} \\ \underline{R} &&& \text{Drehmatrix als Funktion der} \\ &&& \text{Drehparameter } \underline{p} \\ y_{H'}, z_{H'} &&& \text{Bildkoordinaten des Bildhauptpunktes } H' \\ \underline{r}' &= (y - y_{H'}, z - z_{H'})^T && \text{Bildkoordinatenvektor eines Bild-} \\ &&& \text{punktes } P' \\ \underline{u} &= (\underline{u}(1), \underline{u}(2), \underline{u}(3))^T && \text{in den Bildraum transformierte Paß-} \\ &= \underline{R}(\underline{x} - \underline{x}_0) && \text{punktkoordinaten **)} \\ &&& (1) \end{aligned}$$

Damit lauten die üblichen perspektiven Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} y &= y_{H'} + c_K \frac{\underline{u}(2)}{\underline{u}(1)} \\ z &= z_{H'} + c_K \frac{\underline{u}(3)}{\underline{u}(1)} \end{aligned} \quad (2)$$

y und z werden als stochastische Größen angesehen, die Paßpunktkoordinaten \underline{x} als fehlerfrei. Die übliche Linearform zu (2) lautet:

$$\begin{aligned} dy &= dy_{H'} + \frac{\underline{u}(2)}{\underline{u}(1)} dc_K + \frac{\partial y}{\partial \underline{p}} d\underline{p} + \frac{\partial y}{\partial \underline{x}_0} d\underline{x}_0 \\ dz &= dz_{H'} + \frac{\underline{u}(3)}{\underline{u}(1)} dc_K + \frac{\partial z}{\partial \underline{p}} d\underline{p} + \frac{\partial z}{\partial \underline{x}_0} d\underline{x}_0 \end{aligned} \quad (3)$$

worin mit (1):

*) Vektoren und Matrizen werden unterstrichen.

***) Meistens wird in der Photogrammetrie für \underline{R} die Bezeichnung \underline{R}^T benutzt.

$$\frac{\partial y}{\partial p(j)} = c_K \frac{\underline{u}(1) \cdot \frac{\partial \underline{u}(2)}{\partial p(j)} - \underline{u}(2) \cdot \frac{\partial \underline{u}(1)}{\partial p(j)}}{\underline{u}^2(1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial p(j)} = c_K \frac{\underline{u}(1) \cdot \frac{\partial \underline{u}(3)}{\partial p(j)} - \underline{u}(3) \cdot \frac{\partial \underline{u}(1)}{\partial p(j)}}{\underline{u}^2(1)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_0(j)} = c_K \frac{\underline{u}(1) \cdot \frac{\partial \underline{u}(2)}{\partial x_0(j)} - \underline{u}(2) \cdot \frac{\partial \underline{u}(1)}{\partial x_0(j)}}{\underline{u}^2(1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_0(j)} = c_K \frac{\underline{u}(1) \cdot \frac{\partial \underline{u}(3)}{\partial x_0(j)} - \underline{u}(3) \cdot \frac{\partial \underline{u}(1)}{\partial x_0(j)}}{\underline{u}^2(1)}$$

j = 1, 2, 3 (4)

Für die in (4) auftretenden partiellen Ableitungen nach $\underline{x}_0(j)$ ergibt sich aus (1) das folgende einfache Ergebnis:

$$\frac{\partial \underline{u}(j)}{\partial x_0(k)} = \underline{R}(j,k) \cdot \frac{\partial (\underline{x}(k) - \underline{x}_0(k))}{\partial x_0(k)} = -\underline{R}(j,k) \quad j,k = 1,2,3 \quad (5)$$

Diese Differentialquotienten sind bekanntlich von der gewählten Parametrisierung von \underline{R} unabhängig. Das sieht anders aus bei den Differentialquotienten nach den Drehparametern, ebenfalls aus (1) abgeleitet:

$$\frac{\partial \underline{u}(j)}{\partial p(k)} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \underline{R}(j,l)}{\partial p(k)} (\underline{x}(l) - \underline{x}_0(l)) \quad j,k = 1,2,3 \quad (6)$$

Bei der üblichen, hier beschrifteten Linearisierung von (2) müssen die Differentialquotienten von (4), (6), die sich auf die Drehparameter beziehen, je nach gewählter Parametrisierung verschieden ausfallen und ebenso die daraus aufgebauten Normalgleichungen des räumlichen Rückwärtsschnittes.

3. Singuläre Fälle mit bisher bekannten Parametrisierungen von Drehmatrizen

Aus der Literatur haben wir eine Reihe von Parametrisierungen entnommen und in den Tabellen 1-6 zusammengestellt. Sie werden im folgenden näher untersucht. Die Fälle 1.a und 1.b kommen in der Photogrammetrie am häufigsten vor. Zu ihnen gibt es mehrere Variationsmöglichkeiten. Wir haben die in Figur 1 und Tabelle 2 ersichtliche Drehmatrix, die sehr anschaulich die Drehungen eines kardanisch gelagerten Phototheodolits beschreibt, zum Vergleichsstandard für die graphischen Darstellungen der übrigen Fälle herangezogen.

Tabelle 1: Untersuchte Parametrisierungen von Drehmatrizen

1. Drei aufeinander folgende Drehungen um Koordinatenachsen
 - 1.a Drehungen um mitbewegte Achsen
 - 1.b Drehungen um feste Achsen
 - 1.c Euler-Drehungen
2. Eine Drehung um eine einzige spezielle Achse
 - 2.a Drei unabhängige Parameter
 - 2.b Vier abhängige Parameter
3. Drei Elemente der Drehmatrix werden als Parameter eingeführt
 - 3.a Drei Nebendiagonalelemente als Parameter
 - 3.b Drei Hauptdiagonalelemente als Parameter
4. Sonstige Parametrisierungen
 - 4.a Rodrigues-Matrix
 - 4.b Cayley-Klein-Matrix
5. Parametrisierung aufgrund einer Doppelrotation

3.1 Drei aufeinanderfolgende Drehungen um Koordinatenachsen

Geht man von der in Figur 1 dargestellten Nullstellung eines Bildes $\alpha = \epsilon = \kappa = 0$ aus und läßt nur Rechtsdrehungen zu, so gibt es $3! = 6$ verschiedene Möglichkeiten, Drehmatrizen für den Fall 1.a aus drei Einzeldrehungen zu bilden. Sie kommen durch Permutation der Winkelreihenfolge zustande. Für die in der Tabelle 2 gewählte Reihenfolge zeigt die Figur 2 die vollständige Zahl der hiermit verbundenen singulären Fälle an.

Man erkennt, singuläre Fälle gibt es ausschließlich bei Sekundärdrehungen von $\pm 90^\circ$ und beliebigen Werten für die Primär- und Tertiärdrehungen. Im vorliegenden Fall gehört hierzu die aus Tabelle 2 folgende Drehmatrix (7).

Tabelle 2: Drehmatrix für Drehungen um mitbewegte Achsen, Figur 1, Reihenfolge α, ϵ, κ , Fall 1.a

| | | |
|---|---|--------------------------|
| $\cos\alpha\cos\epsilon$ | $\sin\alpha\cos\epsilon$ | $-\sin\epsilon$ |
| $\cos\alpha\sin\epsilon\sin\kappa - \sin\alpha\cos\kappa$ | $\sin\alpha\sin\epsilon\sin\kappa + \cos\alpha\cos\kappa$ | $\cos\epsilon\sin\kappa$ |
| $\cos\alpha\sin\epsilon\cos\kappa + \sin\alpha\sin\kappa$ | $\sin\alpha\sin\epsilon\cos\kappa - \cos\alpha\sin\kappa$ | $\cos\epsilon\cos\kappa$ |

Tabelle 3: Drehmatrix für die Eulerdrehungen $\alpha', \epsilon', \kappa'$, Fall 1.c

| | | |
|---|---|-----------------------------|
| $\cos\alpha'\cos\epsilon'\cos\kappa' - \sin\alpha'\sin\kappa'$ | $\sin\alpha'\cos\epsilon'\cos\kappa' + \cos\alpha'\sin\kappa'$ | $-\sin\epsilon'\cos\kappa'$ |
| $-\cos\alpha'\cos\epsilon'\sin\kappa' - \sin\alpha'\cos\kappa'$ | $-\sin\alpha'\cos\epsilon'\sin\kappa' + \cos\alpha'\cos\kappa'$ | $\sin\epsilon'\sin\kappa'$ |
| $\cos\alpha'\sin\epsilon'$ | $\sin\alpha'\sin\epsilon'$ | $\cos\epsilon'$ |

Primärdrehung α' um Z-Achse, Sekundärdrehung ϵ' um $Y_{\alpha'}$ -Achse, Tertiärdrehung κ' um $Z_{\alpha', \epsilon'}$ -Achse

Tabelle 4: Drehmatrix für die Drehung γ um eine einzige spezielle Achse, Fall 2.c*)

| | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $i^2(1-\cos\gamma)+\cos\gamma$ | $ji(1-\cos\gamma)-k\sin\gamma$ | $ki(1-\cos\gamma)+j\sin\gamma$ |
| $ij(1-\cos\gamma)+k\sin\gamma$ | $j^2(1-\cos\gamma)+\cos\gamma$ | $kj(1-\cos\gamma)-i\sin\gamma$ |
| $ik(1-\cos\gamma)-j\sin\gamma$ | $jk(1-\cos\gamma)+i\sin\gamma$ | $k^2(1-\cos\gamma)+\cos\gamma$ |

*) In den Berechnungen wird k ersetzt durch $k = 1 - i^2 - j^2$
 i, j, k : Richtungskosinus der Drehachse

Tabelle 5: Drehmatrix mit den Nebendiagonalelementen $r_{12} = A$, $r_{13} = B$, $r_{23} = C$ als Parameter, Fall 3.a

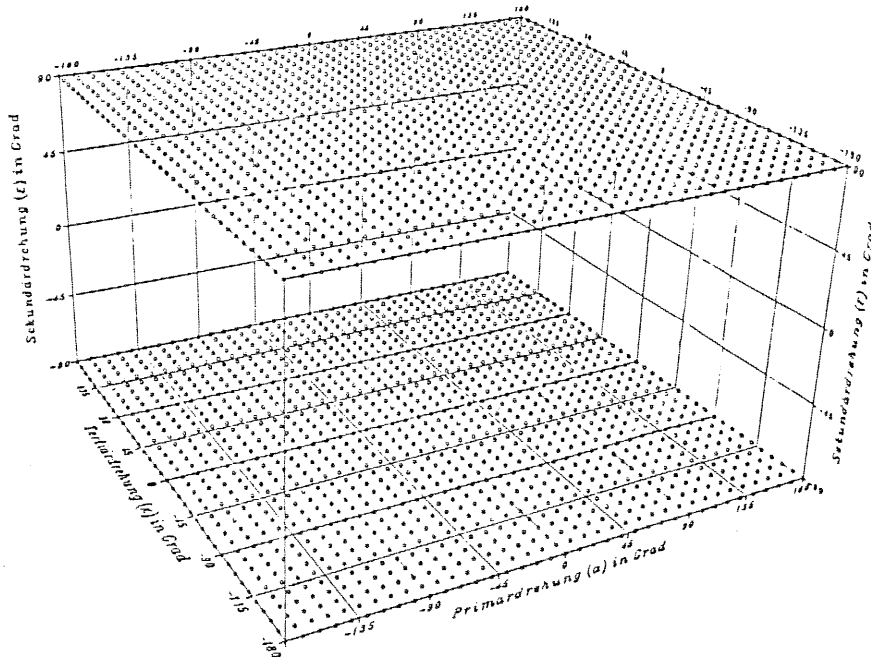
| | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------|
| D | A | B |
| $\frac{-AE-DCB}{(1-B^2)}$ | $\frac{DE-ACB}{(1-B^2)}$ | C |
| $\frac{AC-DEB}{(1-B^2)}$ | $\frac{-DC-AEB}{(1-B^2)}$ | $1-B^2-C^2$ |

Abkürzung: $D = 1-A^2-B^2$, $E = 1-B^2-C^2$

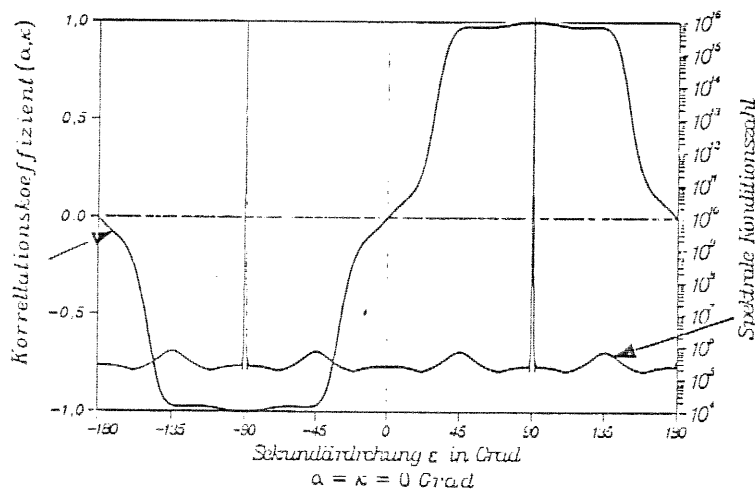
Tabelle 6: Rodrigues-Matrix, Fall 4.a

$$R = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1+0.25(a^2-b^2-c^2) - c+0.50ab & & b+0.50ac \\ c+0.50ab & 1+0.25(-a^2+b^2-c^2) - a+0.50bc & \\ -b+0.50ac & a+0.50bc & 1+0.25(-a^2-b^2+c^2) \end{bmatrix}$$

$$K = 1+0.25(a^2+b^2+c^2)$$



Figur 2: Singularitäten der Normalgleichungen als Funktion der Drehparameter α, ϵ, κ , Drehung um mitbewegte Achsen, Fall 1.a



Figur 3: Korrelation und Kondition bei Drehungen um mitbewegte Achsen, Fall 1.a

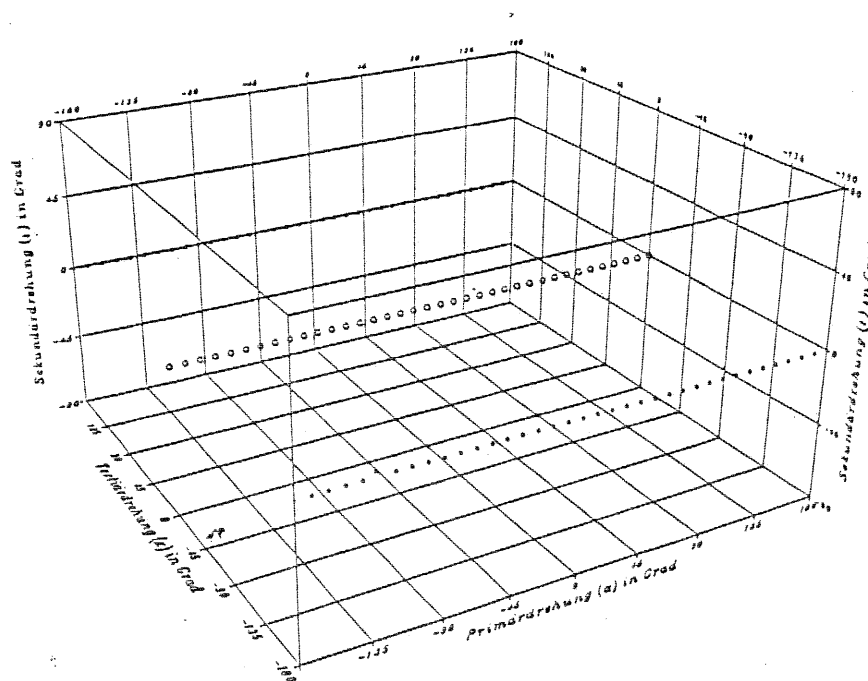
$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ -\sin(\kappa \mp \alpha) & \cos(\kappa \mp \alpha) & 0 \\ -\cos(\kappa \mp \alpha) & -\sin(\kappa \mp \alpha) & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$(\epsilon = \pm 90^\circ)$

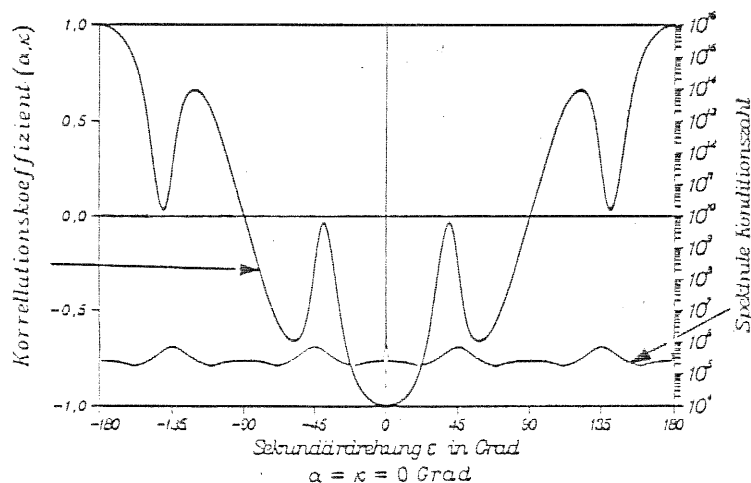
Sie erklärt algebraisch, daß durch die spezielle Sekundärdrrehung die Achsen für α und κ zusammenfallen und ihre Drehbeträge aus einer Ausgleichung nicht mehr getrennt bestimmt werden können. Mathematisch spielt die Drehmatrix der Tabelle 2 keine Sonderrolle gegenüber den übrigen Spielarten von Fall 1.a. Deshalb läßt sich der für diese Matrix festgestellte Befund ohne weiteres sinngemäß auf alle anderen Variationen des Falles 1.a übertragen, sogar auch auf alle 6 Variationen von Fall 1.b, da dort nur die Reihenfolge der Einzelmatrizen umgekehrt wird. Es muß jedoch betont werden, daß zu jeder Variation die entsprechende Sondermatrix analog (7) eine andere Verteilung der Matrixelemente aufweist.

In Figur 3 sind für ein typisches, ausgewähltes Profil $\alpha = \kappa = 0$ die Korrelations- und Konditionsverhältnisse zum eben betrachteten Fall dargestellt. Die darin ersichtlichen Eigenschaften können auch für die folgenden Fälle als repräsentativ gelten. Aus dem allgemeinen, durch die Parameter- und Paßpunktconstellation bestimmten Konditionsniveau von ca. $10^5 - 10^6$ ragen die singulären Stellen mit einem sehr schmalen, sehr hohen Peak heraus (ca. 10^8). Die Lokalisierung gelingt nur, wenn man sich der kritischen Sekundärdrehung in sehr feinen Schritten auf weniger als $0,1^\circ$ nähert. Dagegen entstehen sehr hohe Korrelationen nahe ± 1 schon in einem sehr weiten Umkreis um die singulären Stellen. Im Übrigen, die größten Korrelationen aller 9 Parameter entstanden fast immer zwischen den Drehelementen. Zum besseren Verständnis der numerischen Auflösung der Peaks sei hinzugefügt, daß alle Berechnungen mit einer Mantissenlänge von 15 Stellen auf einem Computer IBM 370/168 der TH Darmstadt ausgeführt wurden (keine Nachiteration!).

Eulerdrehungen, Fall 1.c in Tabelle 1, nennt man solche Drehungen um mitbewegte Achsen, bei denen die Tertiärdrehung stets um die gedrehte Primärachse ausgeführt wird. Die Eigenschaften der Eulerdrehungen im räumlichen Rückwärtsschnitt sind den eben untersuchten Fällen sehr verwandt, Tabelle 3, Figur 4 und 5.



Figur 4: Singularitäten der Normalgleichungen als Funktion der Eulerdrehungen α' , ϵ' , κ' . Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a



Figur 5: Korrelation und Kondition für Eulerdrehungen, Fall 1.c. Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a

Es gibt auch hier 6 Möglichkeiten, Drehmatrizen aufzubauen. Singuläre Fälle erhält man immer, wenn die Sekundärdrehung die Werte 0° oder $\pm 180^\circ$ annimmt.

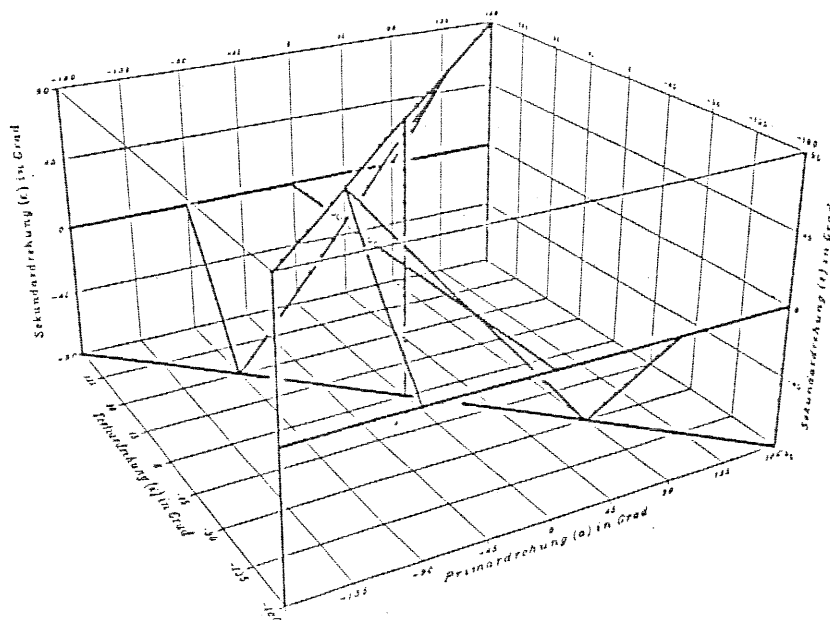
3.2 Eine Drehung um eine einzige spezielle Achse

Jede Drehung eines Achsenkreuzes im Raum kann auch durch eine einzige Drehung um eine einzige Achse beschrieben werden, RINNER u.a. 1972. Es treten vier Parameter auf: Der Parameter γ bezeichnet die Drehung und i, j, k die Richtung der speziellen Drehachse. i, j, k müssen die Bedingung von Richtungskosinus

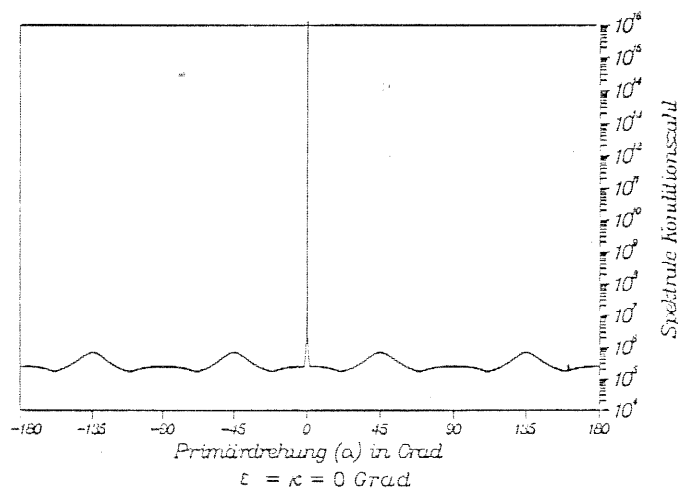
$$i^2 + j^2 + k^2 = 1 \quad (8)$$

erfüllen. Führt man alle vier Parameter als Unbekannte und die Bedingung (8) in die Ausgleichung des Rückwärtsschnittes ein, so entstehen, ohne daß wir dies hier nachweisen, überhaupt keine singulären Fälle. Wegen der Vergrößerung der Normalgleichungen um zwei Gleichungen haben wir diesen Fall 2.b nicht weiter verfolgt. Es gibt einfachere Lösungen, Kapitel 4.

Wir untersuchen dagegen den Fall 2.a, bei dem der Richtungskosinus k mit Hilfe von (8) in der Matrix substituiert wird, Tabelle 4. Wie die Ergebnisse zeigen, Figur 6 und 7, sind bei einer Vielzahl von Parametern singuläre Fälle vorhanden.



Figur 6: Singularitäten der Normalgleichungen als Funktion der Drehung um eine einzige spezielle Achse, Fall 2.a
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a



Figur 7: Kondition für die Drehungen um eine einzige spezielle Achse, Fall 2.a
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a

3.3 Drei Elemente der Drehmatrix werden als Parameter eingeführt

Es gibt hierzu von den vielen konkreten Möglichkeiten zwei bekannte Fälle von Drehmatrizen: Man wählt drei Nebendiagonalelemente als Parameter aus, siehe Tabelle 5; die übrigen folgen aus den Orthogonalitätsrelationen. Diesen Fall hat bekanntlich der British Ordnance Survey benutzt. Beim zweiten Fall verwendet man die drei Diagonalelemente als Parameter.

Von den angestellten Untersuchungen geben wir nur die wesentlichen Ergebnisse wieder. Die singulären Fälle der Drehmatrix 3.a befinden sich auf sechs, paarweise parallel zu - bzw. senkrecht aufeinanderstehenden Ebenen:

Zwei α - Ebenen: $\alpha = \pm 90^\circ$

Zwei ϵ - Ebenen: $\epsilon = \pm 90^\circ$

Zwei κ - Ebenen: $\kappa = \pm 90^\circ$

Die Zahl der singulären Fälle ist also beträchtlich. Für das spezielle Profil $\alpha = \kappa = 0$ wurden die Konditionszahlen berechnet, Figur 8.

Auch für die Drehmatrix 3.b ergibt sich eine sehr große Zahl von singulären Fällen, die im Parameterraum α, ϵ, κ jedoch nicht auf Ebenen, sondern auf Raumgeraden angesiedelt sind.

3.4 Rodrigues - Matrix

In diesem Abschnitt untersuchen wir zur Fallgruppe 4, Tabelle 1, nur die Rodrigues-Matrix, Tabelle 6. Die Cayley-Klein-Matrix, und damit ihre gesuchten Eigenschaften, geht nämlich sehr einfach aus der Rodrigues-Matrix hervor, wenn als Parameter die Größen $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ gewählt werden.

Auch mit der Rodrigues-Matrix stößt man beim allgemeinen räumlichen Rückwärtsschnitt auf eine Vielzahl von singulären Fällen, Figur 9 und 10. Sie lassen sich durch einen Vergleich mit dem Standardfall 1.a auch algebraisch bestätigen. Wir geben nur das Ergebnis bekannt:

Singuläre Fälle der Rodrigues-Matrix im Parameterraum des Sonderfalles 1.a:

$\alpha = 0^\circ$ und $\kappa = \pm 180^\circ$

$\alpha = \pm 90^\circ$ und $\left| \begin{array}{c} \epsilon + \kappa \\ \alpha + \kappa \end{array} \right| = 180^\circ$

$\kappa = 0^\circ$ und $\alpha = \pm 180^\circ$

$\epsilon = \pm 90^\circ$ und $\left| \begin{array}{c} \alpha + \kappa \\ \alpha + \epsilon \end{array} \right| = 180^\circ$

$\epsilon = 0^\circ$ und $\kappa = \pm 180^\circ$

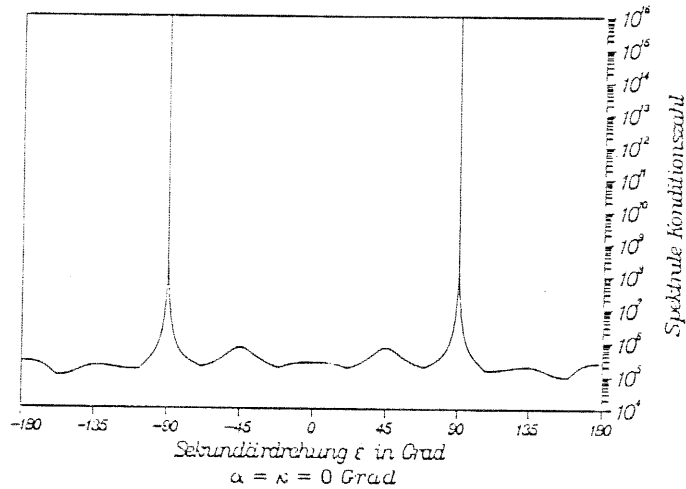
$\kappa = \pm 90^\circ$ und $\left| \begin{array}{c} \alpha + \epsilon \\ \alpha + \kappa \end{array} \right| = 180^\circ$

$\epsilon = 0^\circ$ und $\alpha = \pm 180^\circ$

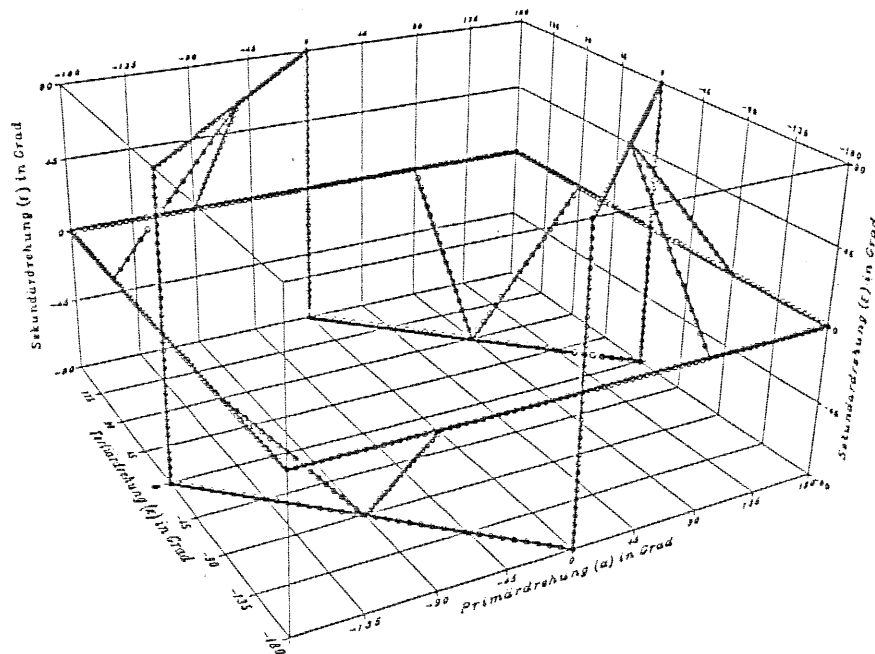
4. Vermeidung instabiler Fälle, insbesondere durch Parametrisierung mittels Doppelrotation

Aus den Untersuchungen des Kapitels 3 geht klar hervor, daß - sieht man einmal vom nicht weiteruntersuchten Fall 2.b ab - sämtliche Parametrisierungen bei allgemeinen Drehungen im Raume singuläre Stellen aufweisen. Will man ein Computerprogramm für allgemeine Drehungen konzipieren, so muß man also nach stabilen Auswegen suchen.

In den Untersuchungsergebnissen kann man aber auch einen gegenteiligen Standpunkt bis zu einem gewissen Umfange bestätigt sehen, nämlich den, nichts zu ändern und die bisherigen Parametrisierungen weiterzuverwenden. Es hatte sich ja in der Tat gezeigt, daß die Stabilität der Normalgleichungen erst in allernächster Nähe der kritischen Parameterwerte zusammenbricht, siehe erneut die Figuren 3, 5, 7, 8 und 10. In einigen numerischen Beispielen haben wir sogar in den kritischen Punkten selbst noch plausible Lösungen erhalten. Vermutlich haben kleine Rundungsfehler das exakte Erreichen der kritischen Stellen verhindert. Man könnte sich daher auf den Standpunkt stellen, in der Praxis werde der kritische Fall, da er ja so exakt getroffen werden muß, äußerst selten vorkommen und unter Umständen helfen dabei Rundungsfehler über die Klippe hinweg! Aber - sollte man sich auf einen solch unsicheren, wenn auch sehr seltenen Vorgang verlassen, wenn es andererseits eine allgemeine stabile Lösung gibt? Wir betrachten hierzu zwei Lösungswege.



Figur 8: Kondition für die Drehmatrix mit den Nebendiagonalelementen r_{12}, r_{13}, r_{23} als Parameter, Fall 3.a
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a



Figur 9: Singularitäten der Normalgleichungen als Funktion der Drehparameter a, b, c nach Rodrigues
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a

4.1 Kombination von zwei verschiedenen Parametrisierungen

Kombinationen verschiedener Parametrisierungen sind nur dann sinnvoll, wenn ihre singulären Fälle bei klar getrennten Raumdrehungen auftreten. Ein Computerprogramm müßte also, je nach den vorkommenden Drehbeträgen, sich für die stabilere Parametrisierung als Programmmodul entscheiden können.

Wir betrachten hier nur Kombinationen bei Drehungen um Koordinatenachsen und zwar die Fälle 1.a und 1.b. Andere Kombinationen ließen sich ebenfalls nennen.

Bezeichnet man die Drehachsen X, Y, Z mit $1, 2, 3$ und bildet die Drehung im Raume aus drei Einzeldrehungen in der Reihenfolge i, j, k , so lassen sich die sechs möglichen Kombinationen von Drehungen um die Koordinatenachsen X, Y, Z wie folgt darstellen (DORRER 1981):

$$\underline{R} = \underline{R}_i \cdot \underline{R}_j \cdot \underline{R}_k = \underline{R}_{ijk}, \quad (9)$$

wobei (i,j,k) eine beliebige Permutation aus 1,2,3 bedeutet. Mit \underline{R} erhält man Singularitäten, wenn die Sekundärdrehung um die j-Achse $\pm 90^\circ$ beträgt. Es gilt dann nach Kapitel 3.1 für die Elemente von \underline{R}_{ijk} :

$R(i,k) = \pm 1$ Die übrigen vier Elemente von \underline{R} können in Abhängigkeit der
 $R(i,j) = R(i,i) = 0$ Drehungen um die Achsen i,k beliebige Werte im Intervall
 $R(j,k) = R(k,k) = 0$ $[-1,+1]$ annehmen. Die Kombinationsvorschrift kann nun formuliert werden: Eine Drehmatrix \underline{R}^+ , die mit \underline{R}_{ijk} keine gemeinsamen singulären Stellen im Parameterraum haben soll, muß in ihren singulären Fällen für das Element $R^+(i,k)$ die Werte ± 1 ausschließen. Dies trifft nur zu bei den Matrizen \underline{R}^+_{ikj} und \underline{R}^+_{jik} . Es ergeben sich damit die folgenden Kombinationsmöglichkeiten:

| \underline{R} | \underline{R}^+ | |
|-----------------|-------------------|-----|
| ijk | ikj | jik |
| 123 | 132 | 213 |
| 132 | 123 | 312 |
| 213 | 231 | 123 |
| 231 | 213 | 321 |
| 312 | 321 | 132 |
| 321 | 312 | 231 |

Die Regel läßt sich für \underline{R}_{123} in der Figur 2 anschaulich erklären. Die singulären Fälle zu \underline{R}_{132} liegen auf zwei parallelen Geraden $\epsilon = 0, \alpha = \pm 90^\circ$ und zu \underline{R}_{213} auf den Geraden $\epsilon = 0, \alpha = \pm 90^\circ$. Sie verlaufen also parallel zu den Ebenen der singulären Fälle von \underline{R}_{123} , sie können also keine Fälle gemeinsam haben. Die Kombinationsregel bezieht sich auf Drehungen um feste Achsen.*) Durch Umkehrung der Indexreihenfolge in (9) usw. folgt die entsprechende Vorschrift um mitbewegte Achsen.

Beispiele:

Die in der Luftbildmessung übliche Drehmatrix aus mitbewegten Achsdrehungen in der Reihenfolge ω, ϕ, κ um X,Y,Z lautet hier $\underline{R}_{\omega\phi\kappa} = \underline{R}_{321}$. Sie ist kombinierbar mit $\underline{R}_{\phi\omega\kappa}$ und mit $\underline{R}_{\omega\kappa\phi}$. Nicht empfehlenswert ist die Kombination von $\underline{R}_{\omega\phi\kappa}$ mit der in der terrestrischen Photogrammetrie anzutreffenden Drehmatrix $\underline{R}_{\alpha\epsilon\kappa} = \underline{R}_{123}$.

4.2 Parametrisierung aufgrund einer Doppelrotation

Anstelle mit zwei kombinierbaren Parametrisierungen kann man das Problem einfacher und universell mit der von uns so genannten Doppelrotation lösen. Dieser Weg ist vermutlich nicht neu, jedoch weitgehend unbekannt.

Wir ersetzen in (1), Kapitel 2, die Rotation mit \underline{R} durch die Doppelrotation

$$\underline{R} = d\underline{R} \cdot \underline{R}_0 \quad (10)$$

Man erhält damit anstelle von (1):

$$\underline{u} = d\underline{R} \cdot \underline{R}_0 (\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (11)$$

\underline{R}_0 soll eine Näherung für \underline{R} darstellen und in einer 1. Drehung den größten Anteil der Gesamtdrehung übernehmen. $d\underline{R}$ braucht nur noch eine kleine Restdrehung auszuführen. \underline{R}_0 und $d\underline{R}$ sind beide orthogonal. Für $d\underline{R}$ gibt es bekanntlich eine sehr einfache Näherungsform, z.B. für die Matrix der Tabelle 2 aus der Gruppe 1.a und 1.b:

$$d\underline{R} \approx d\underline{R}^* = \begin{pmatrix} 1 & +d\alpha & -d\epsilon \\ -d\alpha & 1 & +d\kappa \\ +d\epsilon & -d\kappa & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

worin $(d\alpha, d\epsilon, d\kappa)^T = d\underline{p}$ kleine Größen darstellen. Sie sind unmittelbar die in der Ausgleichung des Rückwärtsschnittes zu bestimmenden Drehparameter.

$d\underline{R}^*$ in der Parametrisierung nach (12) ergibt sehr stabile Normalgleichungen. Dies träfe nicht zu, wenn entsprechende Formen aus den Matrizen 1.c, 2.a und 3.b verwendet würden. Für \underline{R}_0 dagegen sind sämtliche Parametrisierungen zugelassen.

Wir ziehen (10)-(12) heran zur Bildung der Linearform (3) und der Differentiale (4)-(6). An (4) ändert sich nichts, ebenso wenig an (5), wegen der Differenzierung an der Stelle $d\underline{R} = \underline{E}$:

$$\frac{\partial \underline{u}(j)}{\partial \underline{x}_0(k)} = -\underline{R}_0(j,k) \quad j,k = 1,2,3 \quad (13)$$

Anstelle von (6) erhält man:

$$\frac{\partial \underline{u}(j)}{\partial \underline{p}(k)} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial d\underline{R}(j,l)}{\partial \underline{p}(k)} (\underline{u}(l) - \underline{u}_0(l)) \quad (14)$$

worin $\underline{u} - \underline{u}_0 = \underline{R}_0 (\underline{x} - \underline{x}_0)$

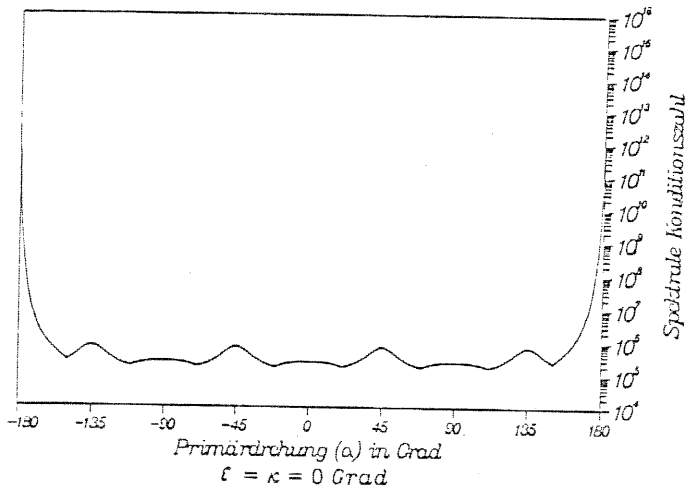
*) siehe Fußnote im Kapitel 2

Die Differentiationen von $dR(j,1)$ sind - im Gegensatz zu (6) - sehr einfach, z.B. folgt für (12):

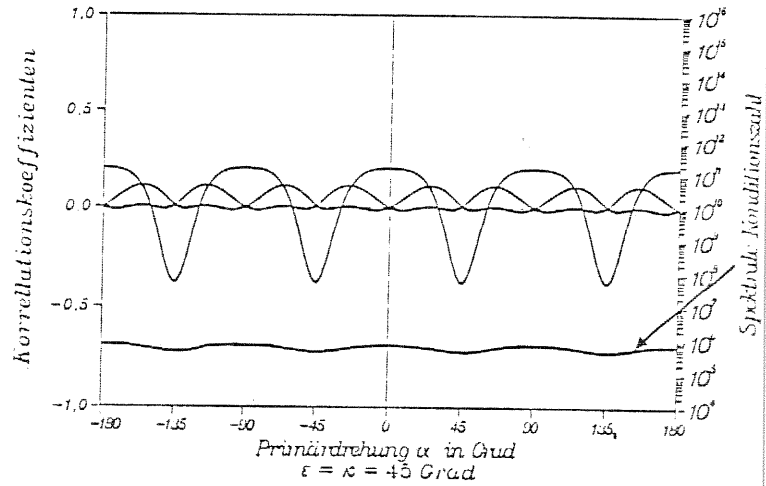
$$\frac{\partial dR(j,1)}{\partial p(1)} = \frac{\partial dR(j,1)}{\partial p(2)} = \frac{\partial dR(j,1)}{\partial p(3)} = \quad (15)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Differentiation anderer Parametrisierungen von dR erzeugt evtl. nur andere Vorzeichenverteilungen.



Figur 10: Kondition für die Drehung mit der Rodrigues-Matrix, Fall 4.a
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a



Figur 11: Kondition und Korrelation aller Drehparameter bei Verwendung der Doppelrotation mit R_0 nach Fall 1.a
Darstellung im Parameterraum des Falles 1.a

Aus den Herleitungen (13)-(15) mit (3)-(5) ergibt sich unmittelbar, daß die Linearform des räumlichen Rückwärtsschnittes nunmehr in ihrer numerischen Stabilität kaum noch von den Drehbeträgen abhängt, vor allem daß keine singulären Fälle mehr auftreten können. Dies wird durch die Resultate aus Figur 11 unterstrichen. Man kann festhalten: Die Linearisierung mittels Doppelrotation besitzt im ganzen Parameterraum räumlicher Drehungen nahezu dieselbe Stabilität wie die bisherigen Linearisierungen nur an ihren stabilsten Stellen.

Im übrigen, zum Schluß einer Ausgleichung mit der Doppelrotation liegt zunächst dR^* vor. Es muß aber R nach (10) berechnet und daraus die eigentlichen Drehwinkel bestimmt werden. Dazu ist es notwendig, dR^* zu orthogonalisieren, z.B. durch Einsetzen der Differentiale $d\alpha$, $d\epsilon$, $d\kappa$ in eine der schon für dR empfohlenen Parametrisierungen. Am Ende der üblichen Iterationen des räumlichen Rückwärtsschnittes gilt $dR^* \rightarrow dR \rightarrow E$ und $R_0 \rightarrow R$.

5. Zusammenfassung

Computerprogramme der analytischen Photogrammetrie für die Anwendungen im Nahbereich sollten in der Lage sein, allgemeine Raumdrehungen der Strahlenbündel ohne numerische Probleme zu verarbeiten. Eine Analyse der in der Photogrammetrie angewandten Parametrisierungen von Drehmatrizen belegt, daß jede von ihnen mehrere Parametersätze aufweist, bei denen die Normalgleichungen sehr schlecht konditioniert oder sogar singulär sind. Es werden Wege zur Lösung aufgezeigt, insbesondere die sehr einfache und universelle Methode der Doppelrotation der Bilder.

6. Literatur

- DORRER, E.: Elementardrehwinkel einer Orthogonalmatrix. *BuL* 49, 1981, 50-54.
- KLEMM, D.: Untersuchungen zur Behandlung singulärer Fälle im Ansatz der allgemeinen Bündelblockausgleichung. Diplomarbeit TH Darmstadt 1983 (unveröffentlicht)
- RINNER, K. u.a.: Jordan/Eggert/Kneißl: *Handbuch der Vermessungskunde*, Band IIIa/1, Stuttgart 1972
- SCHUT, G.H.: Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Photogrammetry. *Photogrammetria* 1958/59, 4, 163-178
- TIENSTRA, M.: A Method for the Calculation of Orthogonal Transformation Matrices and its Application to Photogrammetry and other Disciplines. *IITC-Publ.*, A 48, Enschede 1974
- THOMPSON, E.H.: A Method for the Construct. of Orthogonal Matrices. *Photogrammetric Record*, III, 3, 1959, 55-59