

XIV CONGRES DE LA S.I.P.  
HAMBOURG  
1980

COMMISSION IV

I N T E G R A T I O N   A N A M O R P H O T I Q U E  
D E  
L E V E S   P H O T O G R A M M E T R I Q U E S   N U M E R I Q U E S  
D A N S   U N  
R E S E A U   G E O D E S I Q U E

U.L.W.   V A N   T W E M B E K E

ECOLE ROYALE MILITAIRE DE BELGIQUE  
UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

## Résumé

Cette communication traite d'une interpolation planimétrique "anamorphotique" développée dans le but d'intégrer plusieurs levés partiels dans un réseau géodésique existant. La particularité de la méthode proposée réside dans le fait qu'on arrive à un système de coordonnées géodésiques ou topographiques unique libre de résidus.

## Abstract

This presented paper deals with a planimetric "anamorphotic" interpolation method developed in order to integrate several partial surveys in an existing geodetic network. The particularity of the proposed method consists in the fact that an unique ground co-ordinates system without residuals is obtained.

## Zusammenfassung

Dieser Bericht bringt die Ergebnisse einer Untersuchung über eine planimetrische "anamorphotische" Interpolation. Die Methode hat zum Ziel mehrere lokale Aufnahmen in ein trigonometrisches Rahmen-netz zu integrieren. Die Besonderheit der Methode besteht darin dass am ende der Transformation die Koordinaten restfrei sind.

## 1. INTRODUCTION

La photogrammétrie peut contribuer à l'établissement de réseaux géodésiques et topographiques de 3e et 4e ordre. Cet aspect "extensif" de la photogrammétrie présente un intérêt certain, mais l'intégration d'un réseau photogrammétrique dans un réseau géodésique existant pose pourtant un problème pratique. En effet, lors de la transformation des coordonnées, on obtient un deuxième jeu de coordonnées pour les points géodésiques qui ont servi à la détermination des coefficients de transformation. Le fait d'avoir deux ou plusieurs jeux de coordonnées pour un même point physique est théoriquement acceptable pour autant que l'historique et la nature des différents levés soient bien connues par l'utilisateur de ces coordonnées. Pratiquement, cette approche du problème est difficile à faire admettre et on préfère la notion de "coordonnées uniques". Dès lors, une interpolation planimétrique qui évite l'inconvénient de "coordonnées multiples" est souhaitable. Dans le cas présent, on suppose un réseau de points d'ordre supérieur (réseau géodésique) et un réseau d'ordre inférieur (réseau photogrammétrique). Le but de l'interpolation planimétrique proposée est d'imposer le réseau d'ordre supérieur à celui d'ordre inférieur. La technique proposée est parfaitement valable également quand le réseau inférieur a été obtenu par une numérisation de documents cartographiques existants. La présente communication traite d'une méthode pratique qui a été exploitée pour les besoins de levés photogrammétriques numériques devant servir au relotissement parcellaire dans le cadre du remembrement rural belge.

## 2. PRINCIPE DE L'INTERPOLATION ANAMORPHOTIQUE

### 21. Nature du problème (fig. 1)

Supposons un nombre fini de points  $G_i$  ( $i=1, n$ ) qui forment un contour plan et une fonction  $U_i$  donnée en ces points. Supposons en outre un nombre de points  $P_j$  ( $j=1, m$ ) appartenant au plan mais pour lesquels la grandeur de la fonction  $U$  n'est pas connue. Le problème de la transformation anamorphotique consiste dans la détermination de la valeur de  $U$  pour chaque point  $P_j$  en tenant compte de toutes les valeurs  $U_i$  des points  $G_i$ . Il est possible de déterminer un ensemble de paramètres  $k_i$  ( $i=1, n$ ) de façon à obtenir

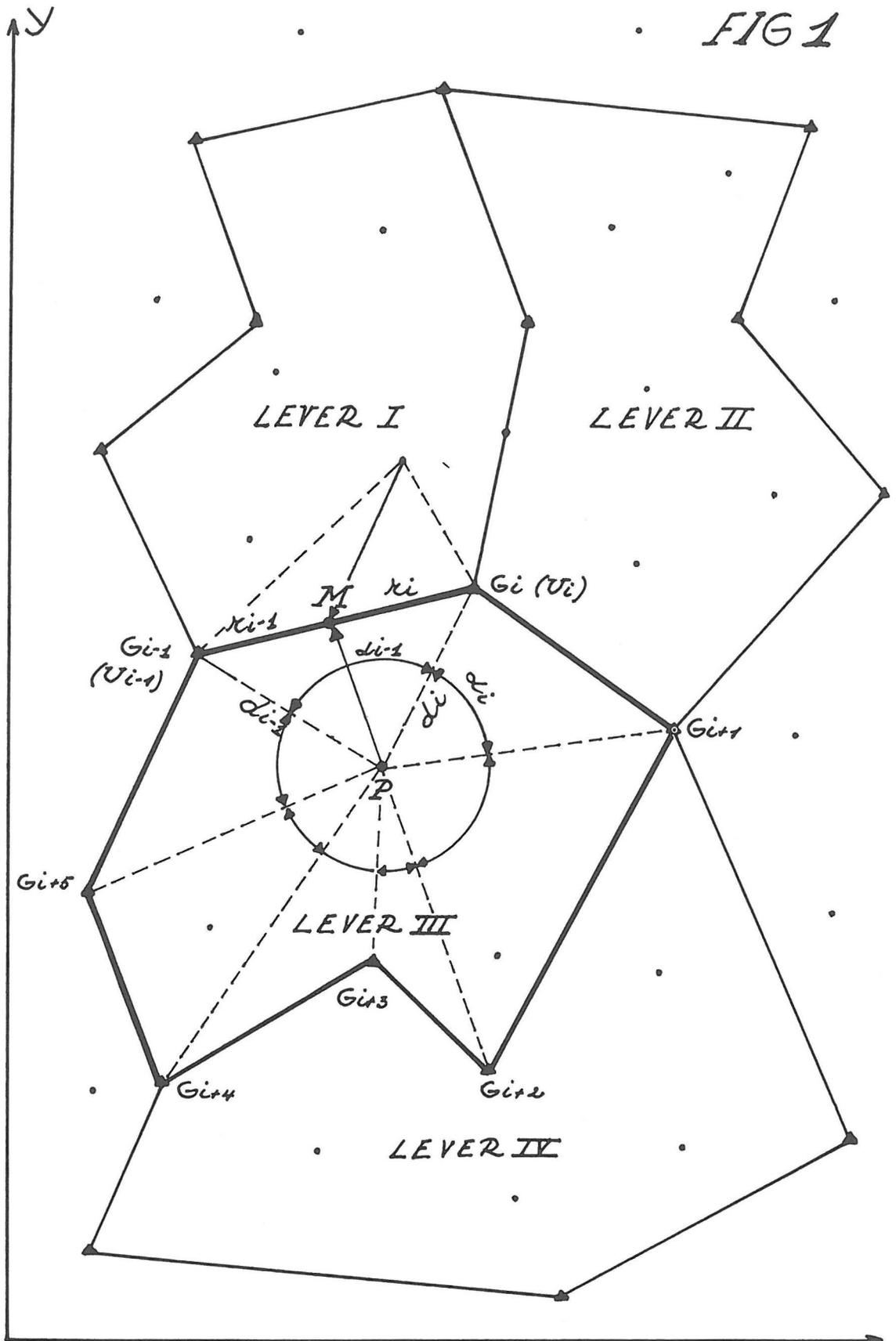
$$U_{P_j} = \sum k_i U_i \quad \begin{matrix} i=1, n \\ j=1, m \end{matrix} \quad (1)$$

La solution proposée admet un nombre infini de solutions et il faut par conséquent imposer des conditions.

### 22. Conditions imposées

- Condition de "résidu nul" : si on applique l'expression (1) aux points  $G_i$ , il faut retrouver les valeurs données  $U_i$ .
- Condition de "solution unique" : supposons deux réseaux d'ordre inférieur qui ont une frontière commune et qui sont à intégrer dans un réseau géodésique unique. Si on applique l'expression (1) dans les deux réseaux à un point  $M$  se trouvant sur la frontière commune, il faut trouver la même valeur pour  $U_M$

FIG 1



G : RESEAU GEODESIQUE (A) P : RESEAU PHOTOGRAMMETRIQUE (.) X

23. Cas particulier de l'expression U.

La solution du problème posé se complique sérieusement dès que n prend des valeurs élevées. Dès lors, on propose de ne pas considérer tous les points  $G_i$  à la fois et de découper le domaine envisagé en triangles. Dans chaque triangle on adopte ensuite l'interpolation linéaire, la seule qui satisfait à la condition de "solution unique".

24. L'interpolation linéaire

Soient  $U_{i-1}$  et  $U_i$  les valeurs données de la fonction U pour deux points consécutifs du contour  $G_{i-1}$  et  $G_i$  et soit M un point sur la droite  $G_{i-1} G_i$ . Si  $r_{i-1}$  et  $r_i$  sont les distances entre M et  $G_{i-1}$ , respectivement  $G_i$  on a pour  $U_M$  :

$$U_M = k_{i-1} U_{i-1} + k_i U_i \quad (2)$$

avec :  $k_{i-1} = \frac{r_i}{r_{i-1} + r_i}$  ;  $k_i = \frac{r_{i-1}}{r_{i-1} + r_i}$  ;  $\sum k = 1$

On constate que la condition de "résidu nul" est satisfaite. Généralisons la formule (2) pour un point P quelconque du plan non situé sur le contour et pour tous les points  $G_i$  du contour. Soit  $d_i$  la distance du point P au point  $G_i$  et  $p_i$  l'inverse de cette distance, on obtient :

$$U_P = \sum k_i U_i \quad i=1, n \quad (3)$$

avec :  $k_i = \frac{p_i}{\sum p}$  ;  $\sum k = 1$  ;  $p_i = \frac{1}{d_i}$

25. Vérification des conditions imposées

Quand le point P tend vers M l'expression (3) doit se réduire à l'expression (2). Autrement dit, les k autres que  $k_{i-1}$  et  $k_i$  doivent tendre vers zéro.

Pour satisfaire à cette condition, introduisons les angles de sommet P dont les côtés passent par tous les points  $G_i$  du contour.

Soient  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$  les angles adjacent à la droite P  $G_i$ . Introduisons une nouvelle définition pour  $p_i$

$$p_i = \frac{1}{d_i} \left( \cot \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_i}{2} \right)$$

Il s'ensuit une nouvelle définition pour  $U_P$

$$U_P = \frac{\sum \left( \cot \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_i}{2} \right) \frac{U_i}{d_i}}{\sum \frac{1}{d_i} \left( \cot \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_i}{2} \right)} \quad (4)$$

Si le point P se rapproche de M, l'angle  $\alpha_{i-1}$  prendra la valeur  $\pi$  et par conséquent  $\cot \frac{\alpha_{i-1}}{2} = \infty$

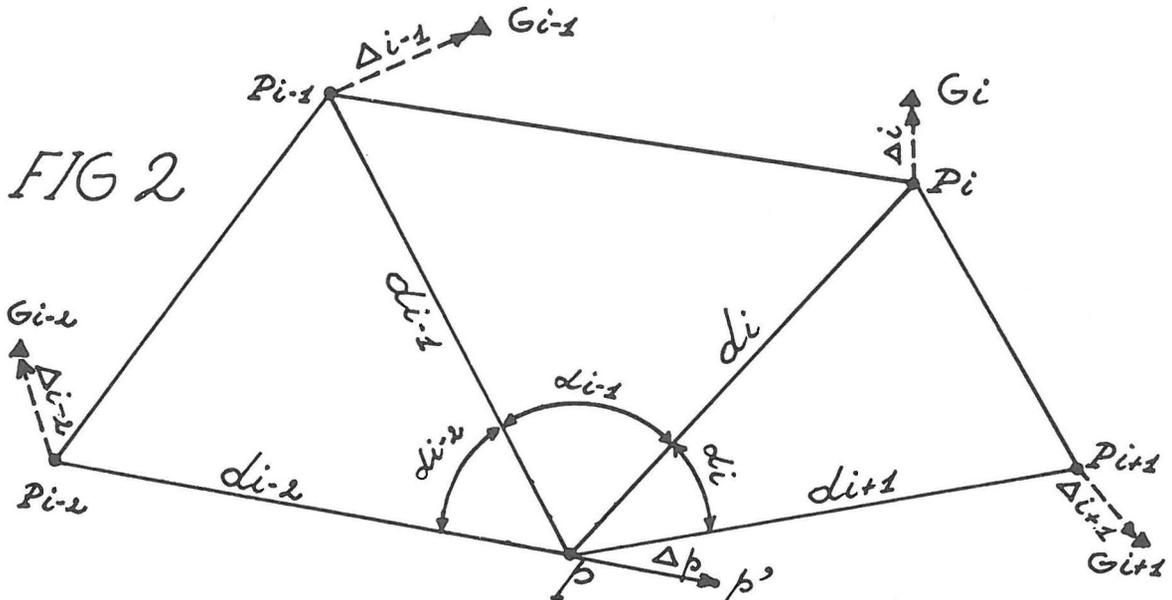
L'expression (4) devient après la division de tous les termes par  $\cot \frac{\alpha_{i-1}}{2}$

$$U_P = \frac{U_{i-1} \cdot d_i + U_i \cdot d_{i-1}}{d_{i-1} + d_i} \quad (5)$$

Cette valeur de  $U_P$  n'est rien d'autre que celle de  $U_M$  de l'expression (2) puisque  $d_{i-1}$  tend vers  $r_{i-1}$  et  $d_i$  vers  $r_i$ .  
On a ainsi satisfait aux deux conditions imposées.

### 3. APPLICATION PRATIQUE DE LA METHODE

#### 31. Données du problème (fig. 2)



- Soient  $G_i (X_i, Y_i)$  les points appartenant au réseau géodésique formant un contour fermé de  $n$  points. Soient  $P_i (x_i, y_i)$  les points correspondant aux points  $G_i$  et appartenant au réseau photogrammétrique. Les coordonnées  $(x_i, y_i)$  ont été obtenus par une restitution photogrammétrique numérique suivie d'une transformation de HELMERT (transformation par similitude).
- Soient  $\Delta_i$  les déplacements linéaires pour passer de  $P_i$  à  $G_i$ .
- Soit  $p (x_p, y_p)$  un point quelconque du réseau photogrammétrique n'appartenant pas aux points  $P$ .
- Soient  $d_i$  les distances du point  $p$  aux points  $P_i$ .

#### 32. Problème à résoudre

Il faut imposer les coordonnées du réseau  $G$  au réseau  $P$  et faire subir au point  $p$  un déplacement linéaire  $\Delta_p$  en fonction de tous les déplacements  $\Delta_i$  des points  $P_i$ .

#### 33. Solution

Par rapport à la théorie générale du chapitre 2 le point  $P$  est remplacé par le point  $p$  et les grandeurs  $U_i$  et  $U_P$  sont à remplacer respectivement par  $\Delta_i$  et  $\Delta_p$ .

#### 4. CONSIDERATIONS D'ORDRE PRATIQUE

##### 41. Optimalisation de l'algorithme

Contrairement à la transformation par similitude de HELMERT, méthode dans laquelle les formules de transformation sont appliquées indifféremment à tous les points  $p$ , la transformation anamorphotique impose le calcul de toutes les distances  $d_i$ , des angles  $\frac{\alpha_i}{2}$  ainsi que de leurs tangentes. L'application de la méthode impose une optimalisation du procédé de calcul de façon à réduire le temps de calcul.

##### 42. La double transformation "conforme-anamorphotique"

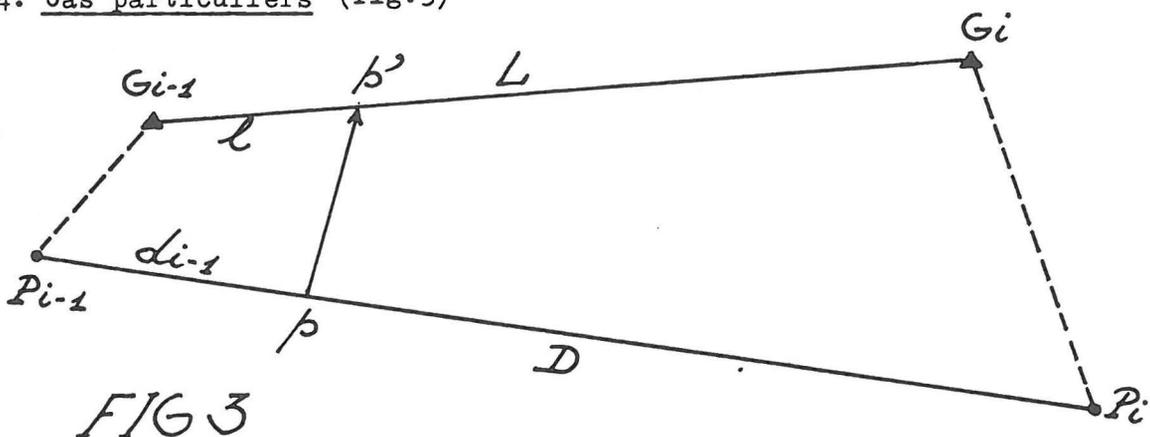
La transformation proposée présente un caractère "radical" en ce sens que même en cas d'erreur grossière dans les coordonnées des points  $G$  ou  $P$  le déplacement de ces derniers aura lieu quelque soit l'importance de ce déplacement. Pour détecter les erreurs grossières on applique d'abord une transformation par similitude au points  $P$ ; l'écart type permettra d'éliminer certains points et de redéfinir ainsi le contour. Ensuite tous les points  $p$  sont transformés dans le réseau  $G$  par une double transformation "similitude-anamorphose". Cette façon de procéder nous a permis de faire une étude statistique de la validité de la méthode et de mettre en évidence quelques particularités de celle-ci.

##### 43. Définition du contour

L'ordre des points du contour  $P$  prend une grande importance puisque c'est la séquence de ces points qui définit les angles à prendre en considération. La forme du contour peut être quelconque, elle peut être convexe ou non convexe. Dans le dernier cas, il se peut que les secteurs des angles se superposent. Dans tous les cas, il faut éviter que le contour se recoupe.

Il semble qu'il soit préférable que ce soit l'ordinateur qui, à partir des points  $G_i$ , détermine le contour sur base d'une des deux options : ou bien on se limite à un contour convexe ou bien on accepte un contour de forme quelconque. Dans ce dernier cas, le nombre de points sur le contour peut être assez élevé puisqu'on arrivera à un contour en forme de dents de scie.

##### 44. Cas particuliers (fig.3)



441. - Si le point p se trouve sur l'alignement  $P_{i-1} P_i$ , on constate que le déplacement vectoriel amène le point en p' sur l'alignement  $G_{i-1} G_i$ . Si D, L,  $d_{i-1}$ , l sont respectivement les distances  $P_{i-1} P$ ,  $G_{i-1} G_i$ ,  $P_{i-1} p$ ,  $G_{i-1} p'$ , on remarque aussi que les positions relatives sont conservées

$$\frac{d_{i-1}}{D} = \frac{l}{L}$$

Cette propriété présente un grand intérêt pratique.

442. Si le point p tend vers le point  $P_i$ , on a que  $d_{i-1}$  tend vers zéro et :

$$\Delta p = \frac{\left( \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2} \right) \frac{\Delta i}{d_i}}{\left( \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2} \right) \frac{1}{d_i}} = \Delta i$$

443. Pour le point p se trouvant à l'extérieur du contour une étude particulière s'impose.

Comme suite à une étude théorique et pratique dans le cas particulier d'un carré nous constatons :

- que la somme des coefficients est toujours égale à un.
- que l'on peut obtenir pour le point p un déplacement plus grand que le plus grand des déplacements d'un point quelconque P.
- que le déplacement du point p peut se faire dans le sens contraire aux déplacements des points P considérés.

Même si tous les points P ont des déplacements orientés dans le même sens (cas d'une erreur systématique), le point p, extérieur au contour, peut se déplacer dans la direction contraire.

Ces phénomènes s'expliquent par la présence de coefficients négatifs provoqués par des angles  $\alpha$  supérieurs à  $180^\circ$ .

Pour éviter cette situation illogique, nous avons envisagé dans ce dernier cas, les angles complémentaires par rapport à  $360^\circ$ , ainsi tous les angles  $\alpha$  restent inférieurs à  $180^\circ$ .

On peut constater que le déplacement du point p a lieu maintenant dans le même sens que les déplacements des points P et que les points G les plus proches ont la plus grande influence sur le déplacement de p.

## 5. RESULTATS OBTENUS

La méthode présentée a été appliquée systématiquement depuis 1976 dans les travaux de restructuration agraire.

### 51. Lors de la mise en place du canevas de relotissement

Ce canevas est obtenu à la suite d'une restitution photogrammétrique numérique et sert à l'implantation du nouveau parcellaire. Il s'agit

de points matérialisés et balisés et dont la densité est de quatre par hectare.

l'implantation se pratique par les méthodes de la topographie classique à partir du canevas qui a été intégré préalablement dans le réseau géodésique par la transformation anamorphotique. Vu la nature du problème qui modifie sensiblement le droit de propriété, les contrôles légaux sont sévères et fréquents. Ces contrôles ont confirmé la validité de la méthode.

## 52. Lors de l'étude et l'exécution des travaux de génie rural

Les projets des travaux de génie rural sont préparés sur des orthophotographies ou des photographies redressées. On complète ces documents par les limites des zones pédologiques, les nouveaux chemins agricoles, les nouvelles voies d'écoulement d'eau et autres. Par la suite cette nouvelle information, de nature graphique, est numérisée (digitalisée). L'information à caractère numérique est transformée et intégrée dans le réseau géodésique par la méthode proposée. Le fichier est mis sur disque magnétique et permet l'accès aléatoire (atrandom). A partir de ce fichier on peut résoudre tous les problèmes qui sont propres à la restructuration et qui concernent des distances, superficies ou volumes. Ce même fichier sert finalement au dessin automatique des nouveaux plans topographiques à l'échelle 1 : 2000.

La transformation anamorphotique est appelée à jouer un rôle important dans tous les travaux cartographiques qui visent l'intégration de différents levés partiels.

## Références

- P.-L. BAETSLE : "Une nouvelle méthode d'interpolation à deux dimensions assurant le raccord continu de levés partiels".  
Bollettino di geodesia e scienze affini  
Anno XXXIII nr 2 1974 (I77-I92)
- U.L. VAN TWEMBEKE et E. LIEVENS : " Le plan topographique obtenu par anamorphose ".  
Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie  
n° II9 - 1975.