MINISTERO DELLE FINANZE
DIREZIONE GENERALE DEL CATASTO E DEI SERVIZI TECNICI ERARIALI

DOTT. MICHELE CAPUTO

# Studio analitico per l'identificazione di coppie di punti omologhi sulle immagini (fotografiche) di una traiettoria piana

*Estratto da « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali »*
*Nuova Serie - Anno X - N. 1, 1955*

ROMA
ISTITUTO POLIGRAFICO DELLO STATO
LIBRERIA
1955

# STUDIO ANALITICO PER L'IDENTIFICAZIONE DI COPPIE DI PUNTI OMOLOGHI SULLE IMMAGINI (FOTOGRAFICHE) DI UNA TRAIETTORIA PIANA

*Si dà un metodo numerico per la determinazione delle coppie di punti omologhi nelle immagini fotografiche di una traiettoria piana. Tale metodo consiste nel determinare la corrispondenza fra le immagini della traiettoria, subordinata all'omografia che sussiste fra i piani delle lastre, per tramite del piano della traiettoria.*

Nel rilievo di linee spaziali, come ad esempio nel rilievo fotogrammetrico delle traiettorie di proiettili o missili, ha grande importanza l'identificazione nei due fotogrammi delle coppie di punti omologhi sulle immagini della traiettoria per le operazioni di restituzione fotogrammetrica col metodo numerico; per questo mi è sembrato opportuno portare contributo al campo di ricerche sull'argomento.

In generale si definisce come normale quella disposizione di Fotogrammetria terrestre in cui si ha assenza nelle due camere di convergenza, di sbandamento, e di obliquità; ed inoltre in cui la base di presa è orizzontale. Tale disposizione presenta in sede di restituzione il vantaggio di permettere la determinazione immediata delle coppie di punti omologhi sulle immagini delle traiettorie.

Nel caso invece in cui le lastre non siano complanari tale metodo non è più applicabile in quanto le ordinate non si conservano. L'identificazione delle coppie di punti omologhi sui due fotogrammi presenta in questo caso notevoli difficoltà qualora si voglia procedere col metodo grafico, in quanto si richiede applicazione del teorema dei punti nodali e di conseguenza dei punti nodali (nucleari) che in generale cadono in posizioni non utili per effettuare graficamente con rapidità l'identificazione delle coppie di punti omologhi.

Uno studio recente della prof. M. Piazzolla Beloch [1] osserva che trasportando le immagini fotografiche in posizione simmetrica, rispetto al centro ottico, a quella occupata dalla camera al momento della presa (ottenendo così una immagine prospettica inversamente uguale alla prima) si ottengono i punti nodali in posizione prossima ai punti principali per cui si ha una disposizione utile per l'identificazione delle coppie omologhe; nello stesso studio si progetta anche un apparecchio utile a risolvere il problema dell'identificazione degli omologhi nel caso più generale. Orbene mi è sembrato utile trattare il problema dell'identificazione dei punti omologhi anche analiticamente, dando una risoluzione al caso in cui le traiettorie siano piane.

Osserviamo intanto che ai metodi grafici non si può dare trattazione analitica tranne nel caso in cui si conoscano le equazioni delle curve immagini della traiettoria sulle due lastre in un dato sistema di coordinate. Cosa che in generale non è possibile ottenere. L'oggetto di questa ricerca consiste appunto nel superare questo ostacolo che si presenta ogni qualvolta si voglia dare trattazione analitica a procedimenti grafici di restituzione. Il mio metodo consiste nel trovare le equazioni della corrispondenza omografica che intercorre fra le immagini fotografiche del piano della traiettoria, ottenendo anche le coppie di punti omologhi sulle immagini della traiettoria, evitando così di passare attraverso le equazioni delle immagini della traiettoria.

Per ricavare tali formule di corrispondenza e per rendere più intelligibili i risultati è opportuno fare alcune considerazioni di carattere teorico intorno ad un problema di carattere generale che come vedremo porta agevolmente ad ottenere le formule di corrispondenza cercate.

---

[1] M. Piazzolla Beloch, *Identificazione strumentale di coppie di punti omologhi sulle immagini fotografiche delle traiettorie di proiettili e missili.* « Rivista del Catasto e dei Servizi Tecnici Erariali », Nuova Serie, Anno IX, n. 3, 1954.

§ 1. – Affinchè il procedimento possa riuscire più chiaro cominciamo col considerare il problema che vogliamo trattare, come esso si presenterebbe se fosse posto per forme di prima specie. Siano perciò $r$ ed $r'$ due rette sghembe dello spazio (vedi *fig.* 1) e sia, in un generico riferimento di coordinate ascisse $t$ e $t'$ su di esse introdotto, $t' = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ l'equazione di una proiettività $\Sigma$ fra esse stabilita. Siano poi $P(X, Y, Z)$ e $P'(X', Y', Z',)$ due punti generici dello spazio. Proiettiamo da essi rispettivamente $r$ ed $r'$ ed associamo rette che proiettano punti corrispondenti, ottenendo così due fasci di rette proiettivi.

Detta $s$ la retta intersezione dei piani $Pr$ e $P'r'$ e $\bar{\Sigma}$ la proiettività in essa generata dai fasci di centri $P$ e $P'$, il problema di determinare il luogo delle coppie $P, P'$ per cui $\bar{\Sigma}$ è l'identità, è identico a quello di determinare le coppie $P', P'$ per cui i fasci di centri $P$ e $P'$ sono prospettivi, e all'altro per cui detti $Q$ e $Q'$ una coppia di elementi corrispondenti di $r$ ed $r'$ la quaderna $P', P, Q', Q$ è complanare.

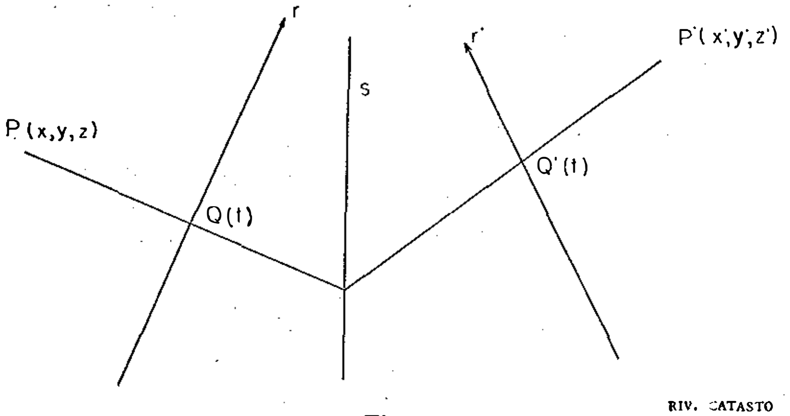


Fig. 1

Questa ultima impostazione del problema suggerisce un metodo assai semplice per risolverlo. Infatti assumendo la retta $r$ come asse della $z$ nel riferimento cartesiano dello spazio ed essendo:

$$x = a t' + a' \quad , \quad y = b t' + b' \quad , \quad z = c t' + c'$$

le equazioni della retta $r'$, per la complanarità della quaderna $P, P', Q, Q'$, si dovrà avere identicamente:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ a\dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} + a' & b\dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} + b' & c\dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} + c' & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [1]$$

l'identità essendo intesa per il parametro $t$.

Sviluppando ed uguagliando a zero i coefficienti di $t^2$ di $t$ ed il termine noto dell'identità che si è ottenuta si ha rispettivamente:

$$\begin{aligned} &\gamma (X' Y - X Y') + (b \alpha + b' \gamma)\, (X - X') + (a \alpha - a' \gamma)\, (Y' - Y) = 0 \\ &(c \alpha + c' \gamma - \delta)\, X Y' - X' Y) + (b \quad + b' \gamma)\, (X' Z - X Z') + (b \beta + b' \delta)\, (X - X') + \\ &\qquad + (a \alpha + a' \gamma)\, (Y Z' - Y' Z) + (a \beta + a' \delta)\, (Y' - Y) = 0 \qquad [2] \\ &(c \beta + c' \delta)\, (X Y' - X Y) + (b \beta + b' \delta)\, (X' Z - X Z') + (a \beta + a' \delta)\, (Y Z' - Y' Z) = 0 \end{aligned}$$

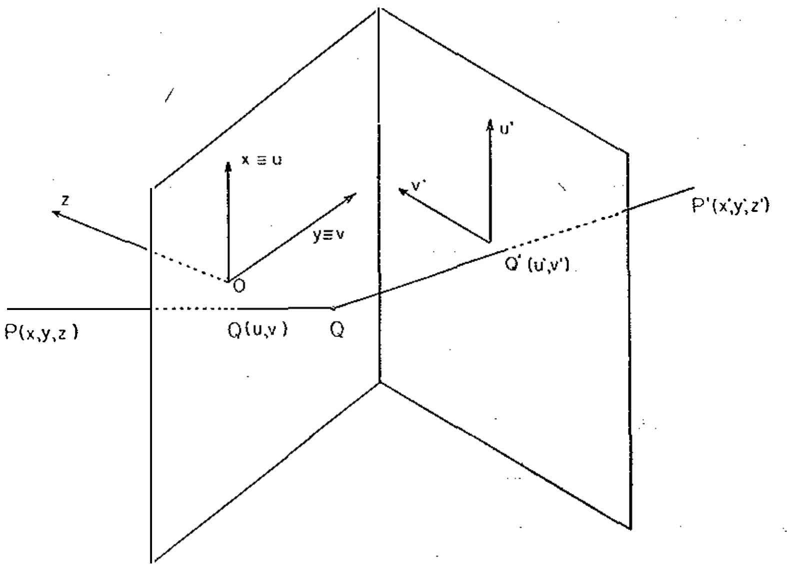
che sono le condizioni cui devono soddisfare le coordinate di $P$ e $P'$ affinchè i quattro punti $P, P', Q, Q'$, siano sempre complanari al variare della coppia $Q, Q'$, ovvero affinchè $\Sigma$ sia l'identità, ovvero affinchè i fasci di centri $P$ e $P'$ siano prospettivi.

Si vede così che le formule trovate definiscono una trasformazione cubica birazionale dello spazio in sè, per cui assegnando ad arbitrio uno dei centri di proiezione l'altro resta univocamente determinato. Inoltre si vede immediatamente che tale trasformazione ha carattere involutorio e che esistono $\infty^3$ coppie di punti che soddisfano alle condizioni poste dal problema.

§ 2. – Per gli sviluppi che faremo in seguito è utile considerare il problema inverso di quello dato, di determinare cioè l'equazione della proiettività fra $r$ ed $r'$ qualora siano note le coordinate di $P$ e $P'$ e le posizioni di $r$ ed $r'$. In questo caso le incognite del problema sono $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ e le equazioni [2] permettono di determinarle. Infatti abbiamo tre equazioni omogenee in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ che individuano univocamente le incognite, per cui determinata l'equazione della proiettività cercata possiamo individuare su $r$ ed $r'$ le coppie di elementi corrispondenti.

Il metodo seguìto potrebbe essere generalizzato al caso in cui $r$ ed $r'$ siano due curve piane proiezione di una medesima curva piana, ma le considerazioni che faremo in seguito permettono di giungere alla risoluzione di questo problema nel caso più generale in cui le curve $r$ ed $r'$ siano date graficamente e non mediante equazioni, non solo, ma questo metodo permetterà di giungere al risultato anche con minor complicazione algoritmica.

§ 3. – Il problema enunciato al n. 1 si può estendere a due piani nella seguente maniera. Dati due piani omografici $\pi$ ed $\pi'$ (vedi *fig.* 2) in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale




RIV. CATASTO

**Fig. 2**

$O(x, y, z)$, e detti $P(X, Y, Z)$ e $P'(X' Y' Z')$ due punti generici dello spazio ci proponiamo di determinare le coppie $P$, $P'$ per cui detta $Q$, $Q'$ una coppia di punti corrispondenti nella omografia fra i due piani, la quaderna $P$, $P'$, $Q$, $Q'$, sia complanare. Procedendo nel modo seguìto per risolvere l'analogo problema di cui al § 1 ed assumendo il piano $\pi$ come piano $xy$ nel riferimento cartesiano, siano

$$\begin{aligned} x &= a\,u' + a'\,v' + a'' = x\,(u', v') \\ y &= b\,u' + b'\,v' + b'' = y\,(u', v') \\ z &= c\,u' + c'\,v' + c'' = z\,(u'\,v') \end{aligned} \qquad [3]$$

le equazioni parametriche del piano $\pi'$ e:

$$u' = \frac{\alpha u + \alpha' v + \alpha''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''}$$

$$v' = \frac{\beta u + \beta' v + \beta''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} \qquad [4]$$

le equazioni dell'omografia fra i due piani, essendo $u, v$ e $u' v'$, coordinate cartesiane sui piani $\alpha$ e $\alpha'$ e $u, v$ tali per cui l'asse $x$ coincida coll'asse $u$ e l'asse $y$ coll'asse $v$.

La condizione affinchè i quattro punti $P, P' Q, Q'$, siano complanari (ovvero affinchè siano prospettive le stelle omografiche che si ottengono proiettando da $P$ e da $P'$ coppie di punti corrispondenti su $\pi$ e $\pi'$) si potrà scrivere:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ x(u', v') & y(u', v') & z(u', v') & 1 \\ u & v & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [5]$$

ove $Q(u, v, o)$, $Q'(x(u', v'), y(u', v'), z(u', v'))$.

Escludendo il caso che $\pi$ e $\pi'$ siano paralleli ed assumendo inoltre tali sistemi di riferimento in modo tale per cui l'asse $x$ e l'asse $u'$ siano paralleli alla retta intersezione di $\pi$ con $\pi'$ (come in fig. 2) allora si ha nelle equazioni [3] che $x = u'$, e $y, z$ dipendono solo da $v'$, cioè esse diventano:

$$x = u'$$

$$y = b' v' + b'' \qquad [3']$$

$$z = c' v' + c''$$

per cui potremo scrivere la [5] nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ \dfrac{\alpha u + \alpha' v + \alpha''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} & b' \dfrac{\beta u + \beta' v + \beta''}{\gamma n + \gamma' v + \gamma''} + b'' & c' \dfrac{\beta u + \beta' v + \beta''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} + c'' & 1 \\ u & v & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [5']$$

l'identità essendo intesa rispetto ai parametri $u, v$.

Da cui sottraendo dalle prime tre righe l'ultima e sviluppando secondo gli elementi dell'ultima colonna si ha:

$$\begin{vmatrix} X - u & X' - u & \alpha u + \alpha' v + \alpha'' - u(\gamma u + \gamma v + \gamma'') \\ Y - v & Y' - v & b'(\beta u + \beta' v + \beta'') + (b'' - v)(\gamma u + \gamma' v + \gamma'') \\ Z & Z' & c'(\beta u + \beta' v + \beta'') + c''(\gamma u + \gamma' v + \gamma'') \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [5'']$$

Affinchè questa equazione sia soddisfatta per ogni coppia $u, v$, per il principio di identità dei polinomi devono essere zero i suoi coefficienti, cioè devono essere nulli i coefficienti di $u^2$, $v^2$, $uv$, $u$, $v$, ed il termine noto, che si ottengono sviluppando. Essi sono rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned}
&(c'\beta + c''\gamma)(Y - Y') - (b'\beta + b''\gamma)(Z' - Z) + \gamma(ZY' - Z'Y) = 0\\
&(c'\beta' + c''\gamma')(X' - X) + \alpha'(Z - Z') + \gamma'(Z'X - ZX') = 0\\
&(c'\beta + c''\gamma)(X' - X) + (c'\beta' + c''\gamma')(Y - Y') + \alpha(Z - Z') + \gamma(Z'X - ZX') +\\
&\qquad + (Z' - Z)(b\beta' + b''\gamma') + \gamma'(ZY' - Z'Y) = 0\\
&(c'\beta'' + c''\gamma'')(Y - Y') + (b'\beta'' + b''\gamma'')(Z' - Z) + (\alpha - \gamma'')(Z'Y - ZY') +\\
&\qquad + (c'\beta + c''\gamma)(XY' - X'Y) + (b'\beta + b''\gamma)(ZX' - Z'X) = 0\\
&(c'\beta'' + c''\gamma'')(X' - X) + \alpha''(Z - Z') + \alpha'(Z'Y - ZY') +\\
&\qquad + (c'\beta' + c''\gamma'')(XY' - X'Y) + (b'\beta'' + b''\gamma' - \gamma'')(ZX' - Z'X) = 0\\
&\alpha''(Z'Y - ZY') + (c'\beta'' + c''\gamma'')(XY' - X'Y) + (b'\beta'' + b''\gamma'')(ZX' - Z'X) = 0
\end{aligned}\right\} \quad [6]$$

Possiamo intanto osservare che le sei equazioni [6] sono dipendenti ed equivalgono a cinque equazioni indipendenti. Infatti consideriamo il problema inverso del precedente, cioè assegnati $\pi$ e $\pi$, $P$ e $P'$ trovare le equazioni dell'omografia $\Omega$ fra $\pi$ e $\pi'$ per cui detta $Q, Q'$ una coppia di elementi corrispondenti nella $\Omega$, la quaderna $P, P', Q, Q'$, sia complanare al variare di $Q, Q'$. Omografie di questo tipo si possono ottenere proiettando su $\pi$ e $\pi'$ da $P$ e $P'$ gli $\infty^3$ piani dello spazio, quindi il sistema in cui si considerano ora come incognite $\alpha, \alpha', \alpha''$, $\beta, \beta', \beta''$, $\gamma, \gamma', \gamma''$ ha almeno $\infty^3$ soluzioni; per cui risulta che essendo il sistema di sei equazioni omogenee nelle nove incognite $\alpha, \alpha', \alpha''$, $\beta, \beta', \beta''$, $\gamma, \gamma', \gamma''$, ed avendo il sistema almeno $\infty^3$ soluzioni, delle sei equazioni cinque al massimo sono indipendenti.

Osserviamo ora che il luogo dei punti di incontro dei raggi corrispondenti delle stelle omografiche che si ottengono proiettando punti corrispondenti di $\pi$ e $\pi'$ da $P$ e $P'$, è costituito da una superficie rigata in cui ogni retta incontra tutte le altre; perciò tale superficie è un piano. Risulta così che le omografie del tipo di $\Omega$ sono solo quelle che si ottengono proiettando da $P$ e $P'$ su $\pi$ e $\pi'$ gli $\infty^3$ piani dello spazio, per cui le equazioni [6] equivalgono effettivamente a cinque indipendenti.

Stabilito così che le omografie fra i piani $\pi$ e $\pi'$ ottenute proiettando da $P$ e $P'$ gli $\infty^3$ piani dello spazio hanno equazioni [4] i cui coefficienti soddisfano le [6]; dati in un opportuno cartesiano i piani $\pi$ e $\pi'$ ed i punti $P$ e $P'$, i coefficienti dell'equazioni di queste omografie, essendo legati da cinque relazioni omogenee indipendenti, si potranno esprimere linearmente in funzione di tre di essi, ad esempio di $\gamma, \gamma', \gamma''$. Si ottengono così le equazioni [4] espresse in modo tale per cui i loro coefficienti dipendono linearmente da $\gamma, \gamma', \gamma''$.

§ 4. – Prima di passare all'applicazione e procedere nel calcolo che condurrà alla determinazione di questi coefficienti sarà bene osservare quanto segue.

È chiaro che tre coppie di punti su $\pi$ e $\pi'$ che sono proiezione da $P$ e $P'$ di tre punti non allineati di un piano $\sigma$ dello spazio individuano fra $\pi$ e $\pi'$ una di queste omografie $\Omega$. Inoltre se vogliamo passare alla determinazione numerica dei coefficienti di tale omografia in base a questi elementi, basta sostituire nelle [4] (in cui tutti i coefficienti siano stati espressi in funzione di $\gamma, \gamma', \gamma''$), le coordinate $u, v$ ; $u', v'$ di queste tre coppie di punti corrispondenti; troviamo così sei equazioni lineari nelle tre incognite $\gamma, \gamma', \gamma''$; è chiaro che di queste equazioni solo tre sono indipendenti, infatti con riferimento alla *fig.* 3 si vede che la coppia $Q$, $Q'$ non può essere data ad arbitrio poichè fissato $Q$, $Q'$ si deve trovare sulla retta $Q_0 C_2$ (per il teorema dei punti nodali); così fissato $Q$, $Q'$ dipende da solo un parametro. Cioè se $Q$, $Q'$ è una coppia di punti corrispondenti proveniente cioè dalla proiezione su $\pi$ e $\pi'$ da $P$ e $P'$ di un punto $\bar{Q}$ dello spazio, essa individua uno solo dei parametri $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ e non due come sembrerebbe a prima vista per il fatto che sostituendo le coordinate $u$, $v$, $u'$, $v'$, nelle [4] (in cui i coefficienti siano espressi in funzione di $\gamma, \gamma', \gamma''$) troviamo due relazioni fra $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$. Risulta ora evidente che tre coppie di elementi corrispondenti su $\pi$ e $\pi'$ (provenienti cioè dalla proiezione da $P$ e $P'$ su $\pi$ e $\pi'$ di tre punti non allineati dello spazio) individuano una ed una sola omografia del tipo cercato.

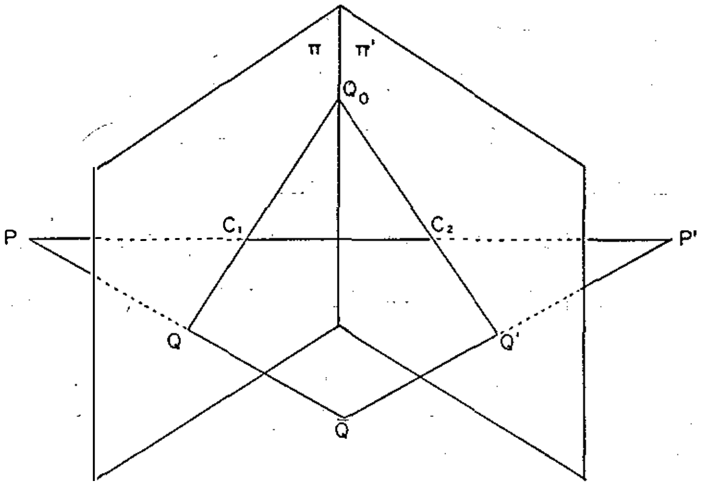



Fig. 3

§ 5. – Volendo ora passare all'applicazione consideriamo che i piani $\pi$ e $\pi'$ siano lastre fotografiche e $P$ e $P'$ siano gli obbiettivi delle camere fotografiche in cui le lastre sono poste. È chiaro che se su $\pi$ e $\pi'$ fotografiamo una traiettoria piana ed abbiamo sulle lastre tre coppie di punti provenienti da tre punti della traiettoria, possiamo supporre di avere fotografato il piano della traiettoria e, avendo tre coppie di punti corrispondenti, individuare la corrispondenza esistente fra i punti delle due lastre. Quindi per mezzo di queste sole tre coppie di punti corrispondenti possiamo ricavare tutte le coppie di punti delle due lastre che provengono da medesimi punti della traiettoria, considerandoli come punti che si corrispondono nell'omografia stabilita fra i piani delle lastre.

Come applicazione dei risultati ottenuti nei numeri precedenti consideriamo il caso in cui le macchine fotografiche abbiano gli obbiettivi alla stessa quota e, indicando con $\pi$ e $\pi'$ le lastre fotografiche, con $O_1$ ed $O_2$ i centri di proiezione cioè i centri degli obbiettivi, si prendano i sistemi di riferimento $O\,(x, y, z)$; $u, v$; $u', v'$ in modo tale per cui $O$ coincida col primo punto principale della prima lastra $C_1$, $x = u'$, $y = v$, e l'origine del sistema $u', v'$ coincida col punto principale della seconda lastra $C_2$, come è indicato in *fig.* 4.

Inoltre indichiamo con $d_1 = O_1 C_1 = O_2 C_2$ le distanze principali, che supporremo uguali fra loro.

Indicando con $\omega$ l'angolo $\pi' y$, con $g$ l'angolo $\pi' z$, e con $b_1$ e $b_2$ gli angoli ridotti all'orizzonte dei piani $\pi$ e $\pi'$, è subito visto che:

$$g = 90° - \omega = 90° - 180° + (b_1 + b_2) = -90° + (b_1 + b_2) \qquad [7]$$

per cui i coefficienti nelle equazioni [3'] risultano

$$\begin{aligned} b' &= -\cos(b_1 + b_2) \quad , \quad & b'' &= y_2 + d \sin(b_1 + b_2) \\ c' &= \sin(b_1 + b_2) \quad ; \quad & c'' &= z_2 - d \cos(b_1 + b_2) \end{aligned} \qquad [8]$$

indicando con $0,\ y_2,\ z_2,$ le coordinate di $0_2$, e con $0,\ 0,\ d$ quelle di $0_1$; perciò la [5'] diventa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & d & 1 \\ 0 & y_2 & z_2 & 1 \\ \dfrac{\alpha u + \alpha' v + \alpha''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} & b' \dfrac{\beta u + \beta' v + \beta''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} + b'' & c' \dfrac{\beta u + \beta' v + \beta''}{\gamma u + \gamma' v + \gamma''} + c'' & 1 \\ u & v & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [9]$$

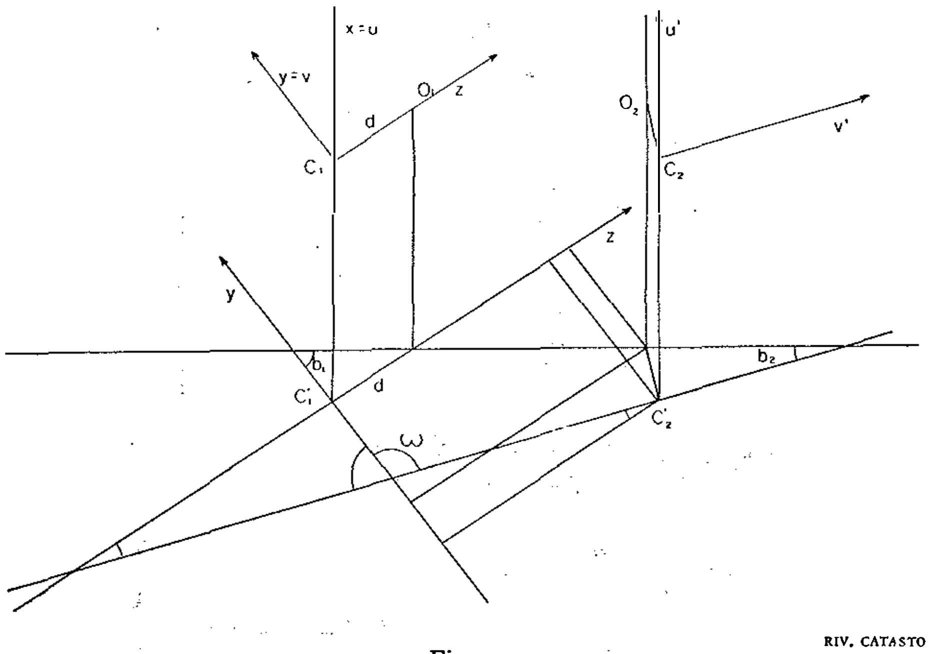



Fig. 4

e sottraendo la prima riga dalle altre e sviluppando secondo gli elementi dell'ultima colonna si ottiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & a u + \alpha' v + \alpha'' & u \\ y_2 & b' (\beta u + \beta' v + \beta'') + b'' (\gamma u + \gamma' v + \gamma'') & v \\ z_2 - d & c' (\beta u + \beta' v + \beta'') + (c'' - d) (\gamma u + \gamma' v + \gamma'') & -d \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad [9']$$

essendo come si è già visto, l'identità intesa per le variabili $u$ e $v$, basta sviluppare ed uguagliare a zero i coefficienti di $u^2$, $v^2$, $uv$, $u$, $v$, ed il termine noto. Si ha così il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned} &(d - z_2)(b' \beta + b'' \gamma) + y_2 (c' \beta + c'' \gamma) - y_2 d \gamma = 0 \\ &(d - z_2)\, \alpha' = 0 \\ &(d - z_2)(b' \beta' + b'' \gamma' - \alpha) + y_2 (c' \beta' + c'' \gamma') - y_2 \gamma' d = 0 \\ &y_2 d \alpha + (d - z_2)(b' \beta'' + b'' \gamma'') + y_2 (c' \beta'' + c'' \gamma'') - y_2 d \gamma'' = 0 \\ &(d - z_2)\, \alpha'' - y_2 d \alpha' = 0 \\ &y_2 d \alpha'' = 0 \end{aligned}\right| \qquad [10]$$

ovvero ponendo:

$$\begin{aligned} y_2 d &= B \\ d - z_2 &= A \\ (d - z_2)\, b' + y_2 c' &= M \\ (d - z_2)\, b'' + y_2 (c'' - d) &= N \end{aligned} \qquad [11]$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned} B\alpha + M\beta'' + N\gamma'' &= 0 \\ -A\alpha + M\beta' + N\gamma' &= 0 \qquad \alpha' = \alpha'' = 0 \\ M\beta + N\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [10']$$

da cui ponendo $\alpha = 1$ si ha:

$$\left.\begin{aligned} \beta'' &= -\frac{N\gamma'' + B}{M} \\ \beta' &= -\frac{N\gamma' + A}{M} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \alpha' &= \alpha'' = 0 \end{aligned} \\ \beta &= -\frac{N\gamma}{M} \end{aligned}\right\} \qquad [12]$$

Risulta così che le equazioni delle omografie fra le lastre $\pi$ e $\pi'$ che si ottengono fotografando piani in posizione generica, sono del tipo:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{u'}{\gamma u' + \gamma' v' + \gamma''} \\ v &= \frac{1}{M} - \frac{N\gamma u' + (A - N\gamma')\, v' - B - N\gamma''}{\gamma u' + \gamma' v' + \gamma''} \end{aligned}\right\} \qquad [13]$$

Nelle equazioni [13] i coefficienti $A, B, M, N,$ dati dalle [11] sono individuati per mezzo delle [8] dalle grandezze $d$, $y_2$, $z_2$, $b_1$, $b_2$ che si devono determinare con misure fatte prima di scattare le fotografie. Per determinare poi $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ si devono avere, come si è detto, tre coppie di punti corrispondenti sulle lastre $\pi$ e $\pi'$, che provengano ovviamente da tre punti non allineati del piano fotografato. Questi tre punti nel caso delle traiettorie saranno tre punti della traiettoria.

Orbene se le due camere fotografiche vengono aperte nello stesso istante e chiuse nello stesso istante, la coppia di punti iniziali e quella dei punti terminali delle immagini della traiettoria dànno senz'altro coppie di punti corrispondenti. Per ottenere la terza coppia si dovrebbe effettuare una chiusura per un tempo brevissimo delle camere fotografiche circa a metà del pezzo di traiettoria che si fotografa e comunque quando l'oggetto che percorre tale traiettoria non sia allineato coi punti che costituiscono gli estremali dei fotogrammi.

Ottenute così tre coppie di punti omologhi, sostituendo le loro coordinate nelle equazioni [13] che dànno la corrispondenza omografica fra i due piani $\pi$ e $\pi'$, si otterranno sei equazioni nelle tre incognite $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ delle quali tre solo sono indipendenti. Considerando ad esempio solo quelle che contengono la $u$ le altre possono servire per controllo. Ovvero tenuto conto che le misure delle coordinate dei punti sulle lastre sono affette da errori si possono considerare tutte le sei equazioni e compensare i risultati mediante applicazione della teoria dei minimi quadrati.

Determinati i coefficienti $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$, le equazioni [13] di corrispondenza fra i due piani sono pienamente individuate e si può procedere alla determinazione delle coppie di punti omologhi sui due fotogrammi della traiettoria.