

Shue Chia Wang, Universität Stuttgart

EINFLUSS DER GEODÄTISCHEN ABBILDUNGSVERZERRUNGEN AUF DIE  
PHOTOGRAMMETRISCHE PUNKTBESTIMMUNG

Zusammenfassung

Die konventionellen Verfahren der Blockausgleichung sehen keine besondere Korrektur für die Verzerrungswirkungen vor, die durch das Landeskoordinatensystem als geodätische Abbildung verursacht sind, sofern nicht vorab eine Transformation in ein drei-dimensionales kartesisches Koordinatensystem durchgeführt wird. Die Verzerrungswirkungen von 3 konformen und 1 nicht-konformen geodätischen Abbildung werden in Abhängigkeit von verschiedenen Projektparametern wie Blocklage und -größe, Bildmaßstab und Paßpunktdichte durch Simulation untersucht. Die Ergebnisse bestätigen, daß die Verzerrungswirkungen klein genug sind, um in allen praktischen Fällen vernachlässigt zu werden, sofern die Erdkrümmungskorrektur berücksichtigt wird.

Summary

The effects of geodetic map projection on aerial triangulation  
The conventional procedures of block-adjustment do not explicitly correct for distortion effects caused by the geodetic projection of state coordinate systems, unless previous transformation into a 3-dimensional cartesian system is applied. The distortion effects of 3 conformal and 1 non-conformal map projections are investigated by simulation with regard to various project parameters such as location and size of blocks, image scale and control. The results show that the distortion effects are small enough to be neglected in all practical cases provided earth curvature correction is applied.

1. Problemstellung und Durchführung der Untersuchung

1.1 Die Theorie der photogrammetrischen Stereo-Auswertung besagt, daß ein räumliches Objekt im Rahmen des zugrundegelegten mathematischen Modells im Prinzip geometrisch fehlerfrei rekonstruiert wird. Insbesondere bleibt bei der Auswertung gekrümmter Objekte, wie z.B. Ausschnitten der Erdoberfläche, die ursprüngliche Krümmung erhalten. Dies gilt sowohl für die Auswertung im Bildpaar als auch im Bildverband, sofern bei letzterem die geometrische Bestimmbarkeit gegeben ist.

Diese geometrisch-anschaulich begründbare Feststellung bestätigt sich durch einen Blick auf die bekannten grundlegenden Abbildungsbeziehungen zwischen Bild und Objekt bzw. ihrer Umkehrung. Ein Problem wegen Erdkrümmung oder geodätischer Projektion tritt dabei überhaupt nicht auf. Allerdings wird dabei stets vorausgesetzt - und das ist hierbei der entscheidende Punkt - daß die Objektpunkte und die Paßpunkte auf ein (beliebiges) 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem bezogen sind.

1.2 Ein Problem entsteht erst dadurch, daß in der Regel die genannte Voraussetzung in der Praxis nicht eingehalten wird. Tatsächlich beziehen sich die eingeführten Paßpunkte (und damit auch die durch die Aerotriangulation bestimmten Neupunkte) praktisch stets auf ein Landesvermessungssystem. Derartige Systeme sind im Prinzip nichtlineare Abbildungen des ursprünglichen ellipsoidischen Koordinatensystems, durch das Punkte der Erdoberfläche eindeutig beschrieben werden. Diese Paßpunktkoordinaten werden nun in der Blockausgleichung fälschlicherweise so behandelt und so in die Rechenformeln eingeführt, als ob sie rechtwinklich-kartesische Koordinaten wären. Die Folge davon ist, daß die photogrammetrische Auswertung auf ein nicht-kompatibles Koordinatensystem eingezwängt wird, was im Prinzip zu internen Spannungen und externen Verzerrungen der Ergebnisse einer so durchgeführten Blockausgleichung führt.

1.3 Zur Lösung des Problems kommen 4 Verfahren in Betracht.

- (1) Umgehung des Problems dadurch, daß wie in der Theorie vorgesehen die Paßpunkte auf ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem zurücktransformiert werden, die Blockausgleichung ganz in diesem System durchgeführt wird und anschließend die Ergebnisse wieder in das Landesvermessungssystem abgebildet werden.
- (2) Zusätzliche Korrektur der Bildkoordinaten
- (3) Modifikation der perspektiven Abbildungsbeziehungen, sodaß die Bildkoordinaten direkt mit den Landesvermessungskordinaten der Objektpunkte in Beziehung gesetzt werden.
- (4) Man behält die an und für sich fälschliche Benutzung der nicht kompatiblen Koordinatensysteme bei und untersucht, in wieweit die entstehenden Verzerrungen toleriert werden können.

Das Verfahren (1) stellt zweifellos die sicherste und sauberste Lösung dar. Es ist tatsächlich auch bei verschiedenen Rechenprogrammen vorgesehen. Die zusätzliche Korrektur der Bildkoordinaten (2) wird üblicherweise für die sogenannte Erdkrümmungskorrektur angewendet, erfaßt in dieser Form aber nur einen Teilaspekt des Problems. Die Einbeziehung der geodätischen Abbildung in die perspektiven Abbildungsbeziehungen ist nicht näher untersucht und wird in der Praxis nicht angewendet, abgesehen von einem auf die Streifenausgleichung beschränkten Versuch von Rinner /2/.

1.4 Hier wird über eine ausführliche Untersuchung /1/ des Verfahrens (4) in Kombination mit der Erdkrümmungskorrektur nach (2) berichtet, wobei die Größe der im ausgeglichenen Block auftretenden Verzerrungswirkungen festgestellt und ihre Tolerierbarkeit geprüft wird.

Die Untersuchung bedient sich der Methode der numerischen Simulation der verschiedenen Fälle. Dabei können alle anderen Fehlerwirkungen der photogrammetrischen Auswertung außer Betracht bleiben, da es sich um nicht-stochastische systematische Fehlerwirkungen im Funktionalmodell handelt.

Als Ergebnisse der Simulationsberechnungen werden jeweils die inneren und die äußeren Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildung auf den ausgeglichenen Block festgestellt:

- innere Verzerrungen in Form von Verbesserungen (Restfehler)  $v_x$   $v_y$  der Bildkoordinaten bei der Bündelmethode bzw. Verbesserungen  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  der Modellkoordinaten bei der Methode der unabhängigen Modelle.

- äußere Verzerrungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  der ausgeglichenen Koordinaten der Geländepunkte.

In den zusammenfassenden Ergebnistabellen sind jeweils die quadratischen Mittelwerte der Verzerrungen  $v$  bzw.  $\epsilon$  dargestellt.

In die Untersuchung wurden 3 konforme geodätische Projektionen (Gauß-Krüger Abbildung, Lambertsche konforme (Kegel)projektion, stereographische Abbildung) und als nicht-konforme die sogenannte ordinatentreue Abbildung einbezogen. Letztere hat in der Vergangenheit als Soldnerprojektion und als preußisches Kataster-Bezugssystem eine gewisse Rolle gespielt, findet aber heute in der Landesvermessung keine Verwendung mehr.

Die resultierenden Verzerrungen sind von einer Reihe von äußeren Projektparametern abhängig. Die Liste umfaßt hauptsächlich:

- die geodätische Projektion )
- Lage des Gebiets in der Abbildungszone ) geodätische Projektparameter
- Größe und Gestalt des Gebiets )
- Größe des Blocks (Anzahl der Bilder) )
- Bildmaßstab )
- Flugrichtung ) photogrammetrische
- Anzahl und Verteilung der Paßpunkte ) Projektparameter
- Hilfsdaten (Statoskop) )
- Überdeckung )
- Stärke der Bild- oder Modellverknüpfungen )
- Ausgleichsmethode )

Die meisten dieser Projektparameter wurden in die Untersuchung einbezogen. Die Schwierigkeit bestand darin, die simulierten Fälle nach den dominierenden Parametern zu ordnen und die übrigen Einflüssen soweit erforderlich abzusichern.

1.5 In einer Voruntersuchung, auf die hier nicht eingegangen werden kann, wurde geklärt, daß die Erdkrümmungskorrektur, die in erster Linie auf die Höhen wirkt, in jedem Falle anzubringen ist und bei den folgenden Untersuchungen stets vorausgesetzt wird. Dabei wurde festgestellt, daß bei großen Höhenunterschieden und bei geneigten Aufnahmen die Erdkrümmungskorrektur strenger als bisher üblich erfolgen muß. Weiter wurde bestätigt, daß nach der Erdkrümmungskorrektur die verbleibenden Wirkungen der Projektionsverzerrungen im Einzelmodell bis zum Bildmaßstab um 1:100 000 vernachlässigbar klein bleiben.

## 2. Ergebnisse der Untersuchung

2.1 Um die Größenordnung der Verzerrungswirkungen aufzuzeigen, wurde zunächst ein kleinmaßstäbiger Block behandelt. Dabei wurden die Parameter so gewählt, daß die erwarteten Effekte deutlich in Erscheinung treten, der Block aber noch durchaus praktischen Bedingungen entspricht (abgesehen von den Paßpunkten). Insofern kann er als "typischer" Fall bezeichnet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Bei einer Beurteilung der Ergebnisse kann zunächst festgestellt werden, daß sowohl bei der Bündelausgleichung als auch bei der Methode der unabhängigen Modelle die internen Verzerrungen ganz außerordentlich klein ausfallen. Die Beträge der mittleren Verzerrungen  $\bar{v}$  bleiben in allen Fällen unter  $1 \mu\text{m}$ , können also vollständig vernachlässigt werden. Dies wird sich bei allen folgenden Fällen bestätigen.

Projektion	Unabhängige Modelle			Bündel-Methode	
innere Verzerrungen	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$	$\bar{v}_z$	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$
Gauß-Krüger (UTM)	0,07 (0,9)	0,01 (0,1)	0,04 (0,4)	0,02 (0,2)	0,03 (0,3)
Lambert konform	0,00 (0,1)	0,04 (0,6)	0,00 (0,0)	0,02 (0,3)	0,00 (0,0)
stereographische	0,04 (0,5)	0,02 (0,3)	0,02 (0,2)	0,02 (0,3)	0,01 (0,2)
ordinatentreue (nicht-konform)	0,07 (0,8)	0,04 (0,6)	0,03 (0,4)	0,03 (0,4)	0,03 (0,3)
äußere Verzerrungen	$\bar{\epsilon}_{x,y}$		$\bar{\epsilon}_z$	$\bar{\epsilon}_{x,y}$	$\bar{\epsilon}_z$
Gauß-Krüger (UTM)	0,32 (4,0)		0,04 (0,5)	0,23 (3,3)	0,11 (1,4)
Lambert konform	0,32 (4,0)		0,03 (0,3)	0,38 (4,8)	0,08 (1,0)
stereographische	0,32 (4,0)		0,01 (0,1)	0,33 (4,1)	0,09 (1,1)
ordinatentreue (nicht-konform)	4,20 (52,5)		0,30 (3,8)	4,55 (56,9)	0,90 (11,3)

Tab. 1 Mittlere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in m im Gelände bzw. ( $\mu\text{m}$ ) im Bildmaßstab.  
 Block: 20 x 41 = 820 Bilder, p = 60 %, q = 20 %, WW 1 : 80 000, 300 km x 300 km; 8 Lagepaßpunkte, 3 Höhenpaßpunktketten (i = 20 b = 150 km); Blocklage 100 km vom Bezug bzw. in der Zonenmitte der nicht-konformen Projektion.

Bei den äußeren Verzerrungen der Blöcke ist zwischen konformen und nicht-konformen Abbildungen zu unterscheiden. Bei den konformen Abbildungen bleiben die äußeren Lageverzerrungen unter Beträgen von 40 cm im Gelände (= 5  $\mu\text{m}$  im Bildmaßstab). Diese Beträge sind angesichts der Größe des Blocks (300 km x 300 km) und der ursprünglichen Verzerrung von 180 m ebenfalls als außerordentlich gering einzustufen. Trotz der schwachen Paßpunktbesetzung ist die Kompensations- bzw. Interpolationswirkung der Paßpunkte unerwartet groß. Die verbleibenden Verzerrungen sind im Verhältnis zu der in diesem Fall selbst bei hohem Genauigkeitsniveau zu erwartenden Fehlerfortpflanzung der zufälligen Fehler völlig vernachlässigbar.

Diese Feststellung gilt nicht für die nicht-konforme ordinatentreue Abbildung, deren äußere Verzerrungswirkungen um eine Zehnerpotenz größer ausfallen. Sie wären im Vergleich zur Wirkung der zufälligen Fehler nicht mehr zu vernachlässigen. Dieses grundlegend unterschiedliche Verhalten der nicht-konformen Abbildung bestätigt sich bei allen noch folgenden Einzeluntersuchungen. Da diese Abbildung aber in der Praxis nicht mehr verwendet wird,

brauchen keine Folgerungen gezogen werden.

Im übrigen bleibt lediglich noch festzustellen, daß sich die Bündelausgleichung und die Ausgleichung mit unabhängigen Modellen bezüglich der äußeren Verzerrungen sehr ähnlich verhalten. Weiterhin fällt auf, daß trotz der vorabgegangenen Erdkrümmungskorrektur noch kleine Höhenverzerrungen der Blöcke auftreten. Sie erklären sich als Sekundärwirkungen der verbleibenden Maßstabsverzerrungen.

2.2 Von dem genannten typischen Fall ausgehend sind die Einflüsse der wichtigsten der aufgezählten Projektparameter untersucht worden. Da hier nicht alle Ergebnisse aufgeführt werden können, sei zunächst summarisch mitgeteilt, daß der Einfluß der Blockform außerordentlich gering bleibt bzw. völlig in der Paßpunktanordnung aufgeht. Ebenso ändert die Flugrichtung die obigen Verzerrungswerte bei konformen Abbildungen nur um maximal 6 %, bei der nicht-konformen Abbildung um maximal 20 %. Die Lage des Gebiets innerhalb der jeweiligen Abbildungszone wirkt sich bei den konformen Abbildungen selbst dann nur geringfügig ( $< 3 \mu\text{m}$ ) aus, wenn der Bereich der Abbildungszone weit überschritten wird. Dagegen würde der Effekt bei der nicht-konformen Abbildung sehr große Beträge ( $200 \mu\text{m}$ ) annehmen.

2.3 Unter den wesentlichen Projektparametern ist der Einfluß der Paßpunktdichte von besonderem Interesse. Dabei ist zwischen Höhen- und Lagepaßpunkten zu unterscheiden.

In Tab. 2 sind für einen hinreichend repräsentativen kleinmaßstäbigen Block ( $1 : 80\,000$ ,  $15 \times 30 = 450$  Modelle,  $220 \text{ km} \times 220 \text{ km}$ ) die Überbrückungsdistanzen der Höhenpaßpunktketten variiert. Dabei bestätigt sich, daß die inneren Verzerrungen in allen Fällen vernachlässigbar klein bleiben, ebenso die äußeren Höhenverzerrungen bei allen konformen Abbildungen. Die nicht-konforme Abbildung bedarf allerdings verhältnismäßig dichter Höhenpaßpunktbesetzung, um die Höhenverzerrungen auf vernachlässigbar kleine Werte zu drücken. In allen Fällen bestätigt sich weiterhin, daß die Lageverzerrungen (die hier wegen der schwachen Lagekontrolle durch nur 4 Lagepaßpunkte verhältnismäßig groß sind) nicht von der Höhenpaßpunktbesetzung beeinflusst sind.

Entsprechend zeigt Tab. 3 für diesen großen Block die Wirkung zunehmender Verdichtung der Lagepaßpunkte am Blockrand. Auch hier bedürfen die inneren Verzerrungen keiner weiteren Beachtung. Die äußeren Lageverzerrungen werden bei den konformen Abbildungen durch zunehmende Paßpunkt-Randbesetzung praktisch völlig unterdrückt. Ab 8 Paßpunkten ( $i = 15$   $b = 110 \text{ km}$ ) sind die Verzerrungen jedenfalls völlig vernachlässigbar, selbst bei nur 4 Lagepaßpunkten in den Blockecken ( $i = 30$   $b = 210 \text{ km}$ ) fallen Verzerrungsbeträge von  $9 \mu\text{m}$  im Vergleich zu den zufälligen Fehlern noch kaum ins Gewicht. Bei der nicht-konformen Abbildung sind dagegen die Lageverzerrungen im ungünstigsten Fall zwar nur um etwa den Faktor 2 größer (hängt hier von der nicht vergleichbaren zentralen Blocklage ab), sie können aber auch mit dichter Paßpunkt-Randbesetzung nicht auf verschwindende Beträge herabgedrückt werden.

Höhenpaßpunktketten Anzahl (Überbrückung)	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$	$\bar{v}_z$	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$
Gauß-Krüger (UTM)						
2 (i = 30 b = 220 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,75 (9,4)	0,67 (8,3)	0,43 (5,4)
3 (i = 15 b = 110 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,75 (9,4)	0,67 (8,3)	0,03 (0,4)
4 (i = 10 b = 75 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,75 (9,4)	0,67 (8,3)	0,02 (0,2)
nicht-konforme Projektion						
2 (i = 30 b = 220 km)	0,09 (1,2)	0,13 (1,7)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13,0)	10,89 (136)
3 (i = 15 b = 110 km)	0,09 (1,2)	0,13 (1,7)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13,0)	1,15 (14,4)
4 (i = 10 b = 75 km)	0,09 (1,2)	0,13 (1,7)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13,0)	0,77 (9,7)
6 (i = 6 b = 45 km)	0,09 (1,2)	0,13 (1,7)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13,0)	0,20 (2,5)

Tab. 2 Mittlere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Höhenpaßpunktketten; in m und in (µm).  
Block: 15 x 30 = 450 Modelle, Wk 1 : 80 000, 220 km x 220 km,  
4 Lagepaßpunkte; Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen.

Anzahl der Lagepaß- punkte (am Blockrand)	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$	$\bar{v}_z$	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$
Gauß-Krüger (UTM)						
4 (i = 30 b = 220 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,75 (9,4)	0,67 (8,3)	0,43 (5,4)
8 (i = 15 b = 110 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,12 (1,5)	0,09 (1,1)	0,44 (5,5)
12 (i = 10 b = 75 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,04 (0,5)	0,03 (0,3)	0,43 (5,4)
60 (i = 2 b = 15 km)	0,07 (0,8)	0,01 (0,1)	0,03 (0,4)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,38 (4,8)
nicht-konforme Projektion						
4 (i = 30 b = 220 km)	0,04 (0,5)	0,01 (0,2)	0,02 (0,2)	0,91 (11)	1,47 (16)	0,57 (7,2)
8 (i = 15 b = 110 km)	0,05 (0,6)	0,03 (0,4)	0,02 (0,3)	1,39 (17)	0,99 (12)	1,64 (20)
12 (i = 10 b = 75 km)	0,07 (0,8)	0,06 (0,7)	0,03 (0,3)	1,09 (14)	0,82 (10)	3,96 (50)
24 (i = 5 b = 37 km)	0,08 (1,0)	0,11 (1,3)	0,02 (0,3)	0,37 (4,6)	0,84 (11)	8,58 (107)
60 (i = 2 b = 15 km)	0,09 (1,2)	0,13 (1,7)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13)	10,98 (136)

Tab. 3 Mittlere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Lagepaßpunkte; in m und in (µm).  
Block: 15 x 30 = 450 Modelle, Wk 1 : 80 000, 220 km x 220 km,  
2 Höhenpaßpunktketten; Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen.

2.4 Der Einfluß der Blockgröße auf die Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildungen muß in Zusammenhang mit der Paßpunktbesetzung beurteilt werden.

Hält man nach dem Beispiel der Tab. 4 zunächst die Anzahl der Paßpunkte pro Block konstant (dort 4 Lage-Paßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten; extrem schwache Paßpunktbesetzung) und steigert die Blockgröße und gemeinsam damit den Paßpunktabstand, so zeigt sich eine deutliche Zunahme der äußeren Lage- und Höhenverzerrungen, und zwar für alle Abbildungen, auch die konformen. Die inneren Verzerrungen sind hier nicht mehr aufgeführt. Sie bleiben in allen Fällen  $< 1 \mu\text{m}$ .

Hält man dagegen den praktischen Verhältnissen entsprechend die Paßpunktabstände konstant, vergrößert also mit zunehmender Blockgröße die Anzahl der Paßpunkte, dann zeigt Tab. 4, daß die Blockgröße bei den konformen Abbildungen keinen Einfluß mehr auf die Verzerrungen hat. Auch bei der extremen Blockgröße bleiben die äußeren Lage- und Höhenverzerrungen deutlich unter  $1 \mu\text{m}$ , obwohl mit Paßpunktabständen von  $10 b = 75 \text{ km}$  nur eine sehr lockere Paßpunktbesetzung vorliegt. Somit entpuppt sich die zunächst festgestellte Abhängigkeit von der Blockgröße als Scheineffekt, der in Wirklichkeit der Abhängigkeit von der Paßpunktbesetzung zuzuschreiben ist.

2.5 Bei den obigen Untersuchungen war Blockgröße stets mit Gebietsgröße und proportional dazu, wegen konstant gehaltenen Bildmaßstabs, mit Größe des Bildverbandes gleichzusetzen. Ändert man dagegen für eine gegebene Gebietsgröße durch Vergrößerung des Bildmaßstabs die Größe des Bildverbandes im photogrammetrischen Sinne der Anzahl der beteiligten Bilder, läßt sich der Einfluß des Bildmaßstabs bzw. der Größe des Bildverbandes auf die Verzerrungswirkungen untersuchen. In Tabelle 5 sind für eine vorgegebene Gebietsgröße ( $45 \text{ km} \times 45 \text{ km}$ ) und vorgegebene (schwache) Paßpunktbesetzung die Verzerrungswirkungen in Abhängigkeit von dem Bildmaßstab des die Fläche bedeckenden Bildverbandes zusammengestellt.

Es bestätigt sich wieder generell, daß die Mittelwerte der inneren Verzerrungen unter Beträgen von  $1 \mu\text{m}$  bleiben. Bei den konformen Abbildungen nehmen selbst die auf den Bildmaßstab bezogenen äußeren Verzerrungen von ohnehin zu vernachlässigenden Beträgen  $< 2 \mu\text{m}$  bei einem Bildmaßstab  $1 : 50\,000$  mit wachsendem Bildmaßstab ständig ab, bis sie bei Bildmaßstäben  $> 1 : 20\,000$  praktisch völlig verschwinden. Entsprechend nehmen die auf das Gelände bezogenen Verzerrungen in noch schnellerer Folge ab. Dies ist umso bemerkenswerter, als die ohnehin schwache Paßpunktanordnung mit wachsendem Bildmaßstab zunehmend ungünstiger wird, da der Paßpunktabstand in Basislängen der jeweiligen Bildbedeckung ausgedrückt linear größer wird. Damit ist gesichert, daß wie erwartet die Verzerrungswirkungen bei mittleren und großen Bildmaßstäben rasch völlig verschwinden und keinerlei Aufmerksamkeit erfordern.

Die äußeren Verzerrungen zeigen bei der nicht-konformen Abbildung wiederum ein anderes Bild. Nach Tab. 5 steigen die äußeren Lageverzerrungen ungefähr proportional mit dem wachsenden Bildmaßstab zu großen Beträgen an. Auf das Gelände bezogen bleiben die Verzerrungen somit etwa konstant, sind aber in jedem Fall nicht mehr tolerierbar.

4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten								
Blockgröße Anzahl der Modelle (Fläche)	Abstand zwischen Paßpunkten /ketten		Gauss-Krüger (UTM)			ordinatentreue Projektion nicht-konform		
	Lage	Höhe	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$
5 x 10 <sup>2</sup> (75 x 75 km <sup>2</sup> )	10 b 75 km	10 b 75 km	0,04 (0,5)	0,03 (0,3)	0,04 (0,5)	0,03 (0,4)	0,06 (0,7)	0,06 (0,7)
10 x 20 <sup>2</sup> (150 x 150 km <sup>2</sup> )	20 b 150 km	20 b 150 km	0,23 (2,8)	0,20 (2,4)	0,18 (2,2)	0,27 (3,4)	0,45 (5,6)	0,23 (2,9)
15 x 30 <sup>2</sup> (220 x 220 km <sup>2</sup> )	30 b 220 km	30 b 220 km	0,75 (9,4)	0,67 (8,3)	0,43 (5,4)	0,91 (11)	1,47 (18)	0,57 (7,2)
20 x 40 <sup>2</sup> (300 x 300 km <sup>2</sup> )	40 b 300 km	40 b 300 km	1,81 (23)	1,55 (19)	0,75 (9,4)			
Konstanter Abstand zwischen Paßpunkten /ketten: i = 10 b = 75 km bzw. i = 2 b = 15 km für die Lagepaßpunkte bei der ordinatentreuen Projektion								
	Anzahl der pp							
5 x 10 <sup>2</sup> (75 x 75 km <sup>2</sup> )	4	2	0,04 (0,5)	0,03 (0,3)	0,04 (0,5)	0,01 (0,1)	0,04 (0,5)	0,16 (2,0)
10 x 20 <sup>2</sup> (150 x 150 km <sup>2</sup> )	8	3	0,04 (0,5)	0,03 (0,3)	0,02 (0,2)	0,03 (0,3)	0,30 (3,8)	0,22 (2,7)
15 x 30 <sup>2</sup> (220 x 220 km <sup>2</sup> )	12	4	0,04 (0,5)	0,03 (0,3)	0,02 (0,2)	0,06 (0,7)	1,04 (13)	0,77 (9,7)
20 x 40 <sup>2</sup> (300 x 300 km <sup>2</sup> )	16	5	0,04 (0,5)	0,02 (0,3)	0,01 (0,2)			

Tab. 4 Mittlere äußere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit von Blockgröße und Paßpunktbesetzung; in m und in (µm).  
WW Bildmaßstab 1 : 80 000, Lagepaßpunkte am Blockrand; Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen.

Bildmaßstab	Anzahl der Modelle	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$	$\bar{v}_z$	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$
Gauss-Krüger (UTM)							
1 : 80 000	3 x 6	0,15 (1,9)	0,02 (0,2)	0,07 (0,9)	0,02 (0,2)	0,13 (1,7)	0,04 (0,5)
1 : 60 000	4 x 8	0,09 (1,5)	0,01 (0,2)	0,04 (0,7)	0,01 (0,2)	0,07 (1,2)	0,03 (0,4)
1 : 40 000	6 x 12	0,04 (1,0)	0,00 (0,1)	0,02 (0,5)	0,01 (0,2)	0,03 (0,8)	0,01 (0,3)
1 : 20 000	12 x 24	0,01 (0,5)	0,00 (0,1)	0,01 (0,3)	0,01 (0,3)	0,01 (0,3)	0,00 (0,2)
ordinatentreue Projektion (nicht-konform)							
1 : 80 000	3 x 6	0,07 (0,9)	0,06 (0,7)	0,03 (0,3)	0,42 (5,3)	0,51 (6,4)	0,18 (2,3)
1 : 60 000	4 x 8	0,04 (0,7)	0,03 (0,5)	0,02 (0,3)	0,41 (6,9)	0,51 (8,5)	0,15 (2,4)
1 : 40 000	6 x 12	0,02 (0,5)	0,01 (0,4)	0,01 (0,2)	0,40 (10,0)	0,51 (12,7)	0,11 (2,7)
1 : 20 000	12 x 24	0,00 (0,2)	0,00 (0,7)	0,00 (0,1)	0,38 (19,2)	0,50 (25,0)	0,05 (2,7)

Tab. 5 Mittlere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit vom Bildmaßstab bei gegebener Gebietsgröße (45 km x 45 km); in m und in µm.  
WW 1 : 80 000, 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten.

2.6 Nach den bisherigen Ergebnissen ist gesichert, daß bei großmaßstäbigen Auswertungen, die meist ohnehin durch geringe Gebietsgröße und dichte Paßpunktbesetzung gekennzeichnet sind, Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildungen nicht zu befürchten sind. Dennoch muß der in der Katasterphotogrammetrie vorkommende Fall der sog. starken Verknüpfungen noch gesondert untersucht werden. In diesem Fall - ob er durch viele Verknüpfungspunkte oder durch Mehrfachüberdeckung zustande kommt - verhalten sich Blöcke als verhältnismäßig starre Einheiten, die sich weniger gut auf die Paßpunkte einzwängen lassen.

Der Fall der starken Verknüpfungen wurde gemäß Tab. 6 für die Bildmaßstäbe 1:20 000 und 1:10 000 simuliert, die ein Gebiet von 22 km x 22 km mit 6 x 12 = 72 bzw. 12 x 24 = 288 Bildpaaren bedecken. Die starken Verknüpfungen werden durch Erhöhung der Anzahl der üblichen Verknüpfungspunkte um den Faktor 10 repräsentiert. Und um die Verzerrungseffekte möglichst deutlich hervortreten zu lassen und somit auf der sicheren Seite zu bleiben wird jeweils eine (unrealistisch) schwache Paßpunktanordnung angenommen.

Wie die Tabelle zeigt, bleiben die inneren Verzerrungen im Bereich von einigen  $\mu\text{m}/10$ . Die äußeren (Lage-)Verzerrungen steigen bei den konformen Abbildungen durch die starke Verknüpfung deutlich an. Die Beträge der Verzerrungen gehen jedoch kaum über 1  $\mu\text{m}$ , sodaß insgesamt auch für den Fall der starken Verknüpfungen, der in dieser Form nur bei großen Maßstäben auftritt, die Wirkung der Projektionsverzerrungen völlig vernachlässigt werden kann.

Die nicht-konforme Abbildung verhält sich wiederum völlig andersartig. Ein Einfluß starker Verknüpfungen zeigt sich nicht, dagegen wären die offenbar von der Gebietsgröße und dem Bildmaßstab abhängigen Verzerrungen mit Beträgen um 10  $\mu\text{m}$  bzw. 20  $\mu\text{m}$  für Präzisionsauswertungen nicht mehr tolerierbar.

Bildmaßstab	Verknüpfungen	$\bar{v}_x$	$\bar{v}_y$	$\bar{v}_z$	$\bar{\epsilon}_x$	$\bar{\epsilon}_y$	$\bar{\epsilon}_z$
Gauss-Krüger (UTM)							
1 : 20 000	1 x	0,00 (0,3)	0,00 (0,0)	0,00 (0,1)	0,00 (0,1)	0,00 (0,2)	0,00 (0,1)
	10 x	0,00 (0,3)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,02 (0,9)	0,01 (0,7)	0,00 (0,1)
1 : 10 000	1 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,1)	0,00 (0,2)	0,00 (0,1)	0,00 (0,1)
	10 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,01 (0,5)	0,00 (0,3)	0,00 (0,1)
ordinatentreue Projektion (nicht-konform)							
1 : 20 000	1 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,1)	0,00 (0,1)	0,00 (0,1)	0,00 (0,1)
	10 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,01 (0,5)	0,01 (0,3)	0,00 (0,1)
1 : 10 000	1 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,0)	0,00 (0,2)	0,00 (0,0)	0,00 (0,1)
	10 x	0,00 (0,1)	0,00 (0,0)	0,00 (0,1)	0,00 (0,3)	0,00 (0,2)	0,00 (0,1)

Tab. 6 Mittlere Verzerrungswirkungen geodätischer Abbildungen in Abhängigkeit von der Stärke der Modellverknüpfungen; in m und in ( $\mu\text{m}$ ).  
 1 x Verknüpfung = 6 Punkte / Modell, 10 x Verknüpfung = 60 Punkte / Modell.  
 Blockgröße 22 km x 22 km; 4 Lagepaßpunkte, 2 Höhenpaßpunktketten, Blockausgleichung mit unabhängigen Modellen.

### 3. Zusammenfassung und Erklärung der Ergebnisse

3.1 Die Untersuchungen über die Verzerrungswirkungen der geodätischen Abbildung auf die photogrammetrischen Blöcke, wenn Paßpunkte fälschlicherweise direkt mit ihren Landeskoordinaten in die Blockausgleichung eingeführt werden, haben in überraschend eindeutiger Weise zu einem klaren Ergebnis geführt.

Die Nicht-Kompatibilität der Koordinatensysteme äußert sich zwar im Prinzip stets in inneren und äußeren Verzerrungen der Blöcke. Die Verzerrungsbeträge sind jedoch bei konformen geodätischen Abbildungen im ganzen Bereich der praktischen Aerotriangulation so klein, daß sie stets völlig vernachlässigbar sind. Die inneren Verzerrungen sind mit Beträgen unter  $1 \mu\text{m}$  im Bildmaßstab ganz generell bedeutungslos. Selbst die äußeren Verzerrungen liegen in den allermeisten praktischen Fällen bei Beträgen um  $1 \mu\text{m}$ . Sie nehmen nur bei kleinen Bildmaßstäben, sehr großen Blöcken und extrem schwacher Paßpunktbesetzung größere Werte an, die jedoch in diesen Fällen im Vergleich zur Auswirkung der zufälligen Fehler noch immer unbedeutend klein sind. Allgemein vorausgesetzt ist jedoch stets, daß die Bild- oder Modellkoordinaten vorab der sog. Erdkrümmungskorrektur unterworfen werden, womit der Krümmung der Höhenbezugsfläche Rechnung getragen wird.

Somit kann abschließend festgestellt werden, daß die Verzerrungswirkungen konformer geodätischer Abbildungen im ganzen Bereich denkbarer praktischer Blockausgleichungen, einschließlich der möglichen Erweiterungen der bisherigen Praxis in extreme Blockgrößen und kleinere Bildmaßstäbe, stets vernachlässigbar klein bleiben. Die wichtige Folgerung aus diesem Ergebnis ist, daß man sich in der Praxis mit den Abbildungsverzerrungen nicht weiter auseinandersetzen braucht.

Die Beurteilung würde völlig anders lauten, wenn es in der Praxis noch nicht-konforme geodätische Abbildungen geben würde. Bei nicht-konformen Abbildungen würden die Verzerrungswirkungen in vielen praktischen Fällen auf sehr erhebliche Beträge anwachsen, die nicht mehr toleriert werden könnten. Da derartige Abbildungen in der Landesvermessung nicht mehr vorkommen, brauchen jedoch keine Maßnahmen ergriffen zu werden.

3.2 Die Feststellung, daß die geodätischen Abbildungsverzerrungen in der Praxis keine Rolle spielen, stößt lediglich in dem Fall an eine Grenze, daß photogrammetrische Aufnahmen aus dem Weltraum gemacht werden, wie es z.B. bei den Spacelab Experimenten aus 250 km Flughöhe geplant ist. Obwohl selbst in diesem Fall die Abbildungsverzerrungen noch weitgehend vernachlässigbar wären, überschreitet die Aerotriangulation bei den entsprechend kleinen Bildmaßstäben sehr schnell die Bereiche der einzelnen geodätischen Abbildungszonen. Es ist in diesen Fällen daher schon aus operationellen Gründen zweckmäßig, für die Aerotriangulation auf ellipsoidische und daraus abgeleitete 3-dimensionale kartesische Koordinatensysteme überzugehen, bei denen Erdkrümmung und geodätische Abbildung überhaupt nicht als Problem auftreten.

3.3 Die erstaunliche Eigenschaft photogrammetrischer Blöcke, die Verzerrungen konformer geodätischer Abbildungen fast ohne Restverzerrungen aufzunehmen, kann nur Ausdruck einer allgemeinen theoretischen Eigenschaft sein und muß allgemein erklärbar sein. Die Erklärung kann man in einem Satz von Cauchy aus der Funktionstheorie sehen, wonach für eine in einem Gebiet  $G$  definierte komplexe analytische Funktion  $f(z)$ , wie sie konforme

Abbildungen grundsätzlich darstellen, der Funktionswert  $f(z)$  eines Punktes  $z$ , der im Innern eines Teilgebiets  $G'$  von  $G$  liegt, durch das Integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$$

bestimmt ist, wobei das Integral über den Rand  $\gamma$  des Teilgebiets  $G'$  zu nehmen ist. Wenn also die Funktion auf dem Rand eines Teilgebiets bestimmt ist, sind alle Funktionswerte innerhalb dieses Gebiets festgelegt.

Dieser Satz entspricht direkt dem in einem konformen System auf einen dichten Paßpunktrahmen eingespannten (Lage-)Block. Entsprechend würde sich ein beliebig großer Block, dessen Bilder oder Modelle als differentiell kleine konforme Flächenelemente aufzufassen sind, ohne jegliche Restverzerrungen einem durch Paßpunkte vorgegebenen Rand anpassen. Tatsächlich weichen photogrammetrische Blöcke in 2 Punkten von diesem theoretischen Fall ab: Einmal sind die Bilder oder Modelle (konforme) Flächenelemente endlicher Größe, und zum anderen ist der Gebietsrand nicht vollständig vorgegeben sondern nur durch einzelne, gegebenenfalls weit auseinanderliegende (Paß-)punkte markiert. Diese Abweichungen von der theoretisch verzerrungsfreien Einpassung photogrammetrischer Blöcke in konforme Landeskoordinatensysteme erklärt die auftretenden Restverzerrungen und erklärt außerdem, daß sie als Sekundäreffekte stets vernachlässigbar klein bleiben.

#### Literatur:

- /1/ S.C. Wang, Einfluß der geodätischen Abbildungsverzerrungen auf die photogrammetrische Punktbestimmung.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1980
- /2/ K. Rinner, Einfluß der Definition der Landeskoordinaten auf die photogrammetrische Triangulation.  
Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Nr. 34,  
München 1959