

Commission V - Groupe de travail 1 - Communication de HOTTIER  
(Institut géographique national - PARIS)

\* \* \*

Couple, méthode des résidus conjugués et équation d'observation  
"quasi - déterminée".

### Summary

It is shown that in the case of the stereo-pair (less than 150 unknowns : spatial coordinates of object-points, bundle unknowns and additional parameters of systematism) it is not necessary if a semi-iterative method is used like that of conjugated residuals to distinguish several cases in the software (relative orientation, general compensation with relative orientation, scaling, absolute orientation, additional parameters of systematism or not ..) : a unique observation equation for image coordinates, the most complete one covers all cases; the normal system can be undetermined (relative orientation), determined or "quasi - determined" (only a small number of small spectral values for the normal matrix); in all these cases the solution given by the algorithm of conjugated residuals is numerically correct. This allows a considerable saving of software.

### 1. Introduction

Le problème de la résolution du couple en photogrammétrie analytique est posé habituellement dans les termes suivants : résoudre un ensemble d'équations d'observations relatifs à deux sortes de mesures :

- des mesures au comparateur de coordonnées-cliché  $x_i, y_i, x'_i, y'_i$  des points-images gauche et droit d'un ensemble de points-objet
- des mesures X Y Z de coordonnées de points résultant d'opérations de triangulation (ou des mesures de distances etc...).

Si l'on suppose exactement connues distances principales et points principaux relatifs aux deux clichés, les équations d'observation aux coordonnées-cliché sont après linéarisation de la forme :

$$\begin{aligned} a_i dX_i + b_i dF_1 + K_i &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{x_i} \\ c_{y_i} \end{pmatrix} \\ a'_i dX_i + b'_i dF_2 + K'_i &= \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c'_{x'_i} \\ c'_{y'_i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

$dX_i$  désignant l'inconnue de point relatif au  $i^{\text{ème}}$  point, c'est-à-dire les variations qu'il faut faire subir aux coordonnées approchées de ce point pour obtenir ses coordonnées vraies,  $dF_1$  et  $dF_2$  les inconnues de faisceau (variations des sommets des deux faisceaux, rotations différentielles de mise en place),  $c_{x_i}, \dots, c_{y'_i}$  les erreurs de mesure,  $K_i, K'_i$  les termes constants

Quant aux équations relatives aux points d'appui (control points) on les écrits sous la forme :

$$dX_i = X_{T,i} - X_{o,i} - e_{X_{T,i}} \quad (2)$$

$X_{T,i}$  désignant les coordonnées terrain, et  $e_{X_{T,i}}$  leur erreur,  $X_{o,i}$  les coordonnées approchées.

Si aucun appui n'entre en jeu (problème de l'orientation relative) les équations (1) donnent après normalisation une équation indéterminée; il faut rajouter sept conditions indépendantes (par exemple : sommets fixés; vecteur définissant la rotation différentielle de mise en place du faisceau gauche à composante nulle selon la base).

Enfin dernier point, lorsque les appuis sont en nombre suffisant et adéquatement disposés, on améliore en moyenne sensiblement l'exactitude en rajoutant dans les équations aux coordonnées-cliché un certain nombre de paramètres rendant compte de systématisme ou de déformation.

Il en existe un grand choix; ainsi à l'I.G.N. utilisons-nous les variations de distances principales, et de coordonnées des points principaux  $dA_1, dA_2, dx_{1E}, dy_{1E}, dx_{2E}$  et  $dy_{2E}$ , et deux inconnues de distorsion radiale  $A_1$  et  $A_2$  en  $r^3$  ( $r$  distance radiale au centre de cliché)\*

Les équations (1) sont alors réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned} a_i dX_i + b_i dF_1 + c_i dG_1 + k_i &= \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_i} \\ e_{y_i} \end{pmatrix} \\ a'_i dX_i + b'_i dF_2 + c'_i dG_2 + k'_i &= \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x'_i} \\ e_{y'_i} \end{pmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

$dG_1$  et  $dG_2$  désignant respectivement les inconnues de systématisme relatives aux deux clichés.

\* \* \*

Si bien qu'un programme universel doit couvrir les situations suivantes :

.../...

---

\* Ces inconnues n'ont presque aucun sens physique, contrairement à ce que peut laisser croire leur dénomination : l'expérience a simplement montré qu'elles étaient efficaces pour absorber certaines insuffisances du modèle, c'est-à-dire modéliser certains défauts comme celui d'une mauvaise application du cliché sur le fond de chambre; aussi sont-elles prises différentes à gauche et à droite même quand les deux clichés sont issus de la même chambre.

- orientation relative pure : équations (1) + 7 conditions
- compensation générale des mesures-cliché et des mesures terrain dans différents cas :
  - . sans inconnues de systématisme quand le canevas d'appui est pauvre
  - . avec une partie des inconnues de systématisme pour un canevas moyen pauvre ou riche mais plat
  - . avec toutes les inconnues quand le canevas est dense et bien tridimensionnel.

Le mode de programmation le plus utilisé consiste à remarquer qu'on élimine facilement les inconnues de points  $dX_i$  dans le système normal, plus précisément qu'on peut - il n'y a aucune difficulté mathématique - calculer directement l'apport des équations aux coordonnées-cliché au système normal résiduel où ne figurent plus que les inconnues de faisceau et éventuellement des inconnues de systématisme.

Mais tous ceux qui ont opéré de cette façon - et j'en suis - conviendront qu'elle demande un gros volume de programmation, d'autant plus gros qu'on veut effectivement couvrir tous les cas, et que les cas ambigus posent de douloureux casse-têtes : quand faut-il et quand peut-on introduire des inconnues de systématisme ?

Pour tourner l'obstacle, c'est-à-dire pour éviter que par surprise surgisse une matrice mal conditionnée on peut évidemment écrire de pseudo-équations d'observations du type :

$$dG_1 = 0; \quad dG_2 = 0$$

convenablement pondérées de façon à éviter un mauvais conditionnement tout en préservant l'efficacité des inconnues de systématisme. Mais le choix de ces poids est fort délicat et oblige à une cuisine peu ragoûtante.

## 2. Le couple et la méthode des résidus conjugués

Notre but est d'attirer l'attention sur le point suivant : dans le cas du couple tous les inconvénients que nous venons de signaler disparaissent simultanément si on emploie la méthode des résidus conjugués.

- d'abord, et ce fait commence à être connu, diminution considérable du volume de programmation (avantage essentiel lorsqu'il faut programmer sur de petits ordinateurs) et mise au point plus facile.
- en outre - et c'est à cause de cela qu'a été écrit cet article - possibilité de supprimer toute équation de condition et toute pseudo-équation d'observation posée pour lever une indétermination : on peut n'écrire qu'une seule équation d'observation par mesure avec toutes les inconnues de systématisme et qui vaut pour toutes les situations.

Nous estimons que parce qu'ils interviennent simultanément ces deux avantages sont considérables; précisons bien que nous n'envisageons ici que le cas du couple (à la rigueur d'un petit nombre de

clichés) où le nombre d'inconnues reste assez faible (moins de 150 en général), et les équations très creuses (une quinzaine de coefficients non nuls seulement); dans les autres cas il se peut qu'il faille moduler les affirmations précédentes pour tenir compte de l'effet des erreurs d'arrondi.

\* \* \*

Rappelons d'abord brièvement l'algorithme des résidus conjugués [ (1) Dufour, IGN ] Soit  $\underset{np}{A} \bar{X} = L - \bar{c}$  l'équation d'observation; et supposons d'abord que le rang de A soit égal à son nombre de colonnes (cas classique); l'algorithme fournit la solution  $\bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T L$  en  $\mu$  itérations de la séquence suivante :

1 <sup>ère</sup> itération	i <sup>ème</sup> itération	
$R_1 = A^T L$	$R_i = R_{i-1} - m_{i-1} T_{i-1}$	(4)
$T_1 = A^T A R_1$	$T_i = A^T A R_i$	
$k_1 = R_1^T R_1 / T_1^T T_1$	$k_i = R_i^T R_i / T_i^T T_i$ ; $\rho_i = R_i^T R_i / R_{i-1}^T R_{i-1}$	
$P_1 = k_1 R_1$ ; $S_1 = k_1 T_1$	$P_i = k_i R_i + \rho_i P_{i-1}$ ; $S_i = k_i T_i + \rho_i T_{i-1}$	
$m_1 = S_1^T R_1 / S_1^T S_1$	$m_i = S_i^T R_i / S_i^T S_i$	
$X_1 = m_1 P_1$	$X_i = X_{i-1} + m_i P_i$	

Il est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

- la somme des carrés des résidus  $R_i^T R_i$  diminue à chaque itération (on peut donc arrêter le processus quand  $R_i^T R_i < \varepsilon$  )
- les résidus successifs sont conjugués :  $R_j^T A^T A R_i = 0 \quad \forall i \neq j$

Pour la pratique, il faut remarquer que seuls 4 vecteurs auxiliaires ( $R_i, T_i, P_i, S_i$ ) dimensionnés au nombre d'inconnues sont nécessaires, et qu'il n'est besoin d'aucune normalisation préalable : le vecteur  $T_i = A^T A R_i$  se calculant par les appo rts successifs de chaque équation d'observation; c'est en ce point d'ailleurs que réside la limitation de la méthode : il faut avoir un accès rapide aux équations d'observation puisqu'on est contraint en principe de les faire défiler  $\mu$  fois de suite. Mais le problème ne se pose pas dans le cas du couple.

La programmation est d'une très grande facilité.

\* \* \*

Ceci étant nous affirmons qu'on peut simplifier considérablement l'analyse et la programmation en n'écrivant qu'un seul type d'équation d'observation aux coordonnées-cliché savoir le plus complet (3) :

et en utilisant l'algorithme des résidus conjugués.

On obtient si  $AX = L - \dot{e}$  est l'équation matricielle d'observation :

- quand l'équation est déterminée (canevas d'appui dense et bien tridimensionnel) la solution classique
- quand l'équation est indéterminée, c'est-à-dire quand quelques valeurs propres de  $A^T A$  sont nulles, et toutes les autres nettement positives, la solution intrinsèque, c'est-à-dire une solution qui convient tout aussi bien que les solutions classiques (obtenues en posant des conditions convenables) en ce sens que l'estimation de toute quantité fonction uniquement des quantités observées est la même\* que l'on opère de l'une ou l'autre façon,
- quand l'équation est "quasi - déterminée", c'est-à-dire ici (voir l'appendice pour une définition plus précise et plus générale) en cas de canevas d'appui trop pauvre ou trop plat pour qu'on puisse déterminer correctement toutes les inconnues de systématisme (certaines valeurs propres de la matrice normale peuvent en outre être nulles) une solution numériquement très voisine de celle qu'on obtiendrait en supprimant les dites inconnues.

autrement dit dans tous les cas, et par la même programmation "la" solution du problème. La démonstration figure à l'appendice.

### 3. Essais

Le programme écrit à l'I.G.N. conformément à ce qui vient d'être exposé ne comporte qu'un seul type d'équation d'observation aux coordonnées-cliché (3) avec 8 inconnues de systématisme, aucune équation de condition ou pseudo-équation d'observation.

On a pu comparer pour quelques couples les résultats fournis par ce programme avec ceux d'un programme classique :

- Quand on fait intervenir un canevas d'appui suffisant pour que la matrice normale soit correctement conditionnée, aucune différence notable entre les deux programmes ; ce qui était attendu et trivial.
- Le cas le plus intéressant est celui de l'orientation relative pure; classiquement on forme le modèle, et on l'ajuste ensuite sur les appuis par similitude; ici avec la méthode des résidus conjugués la formation du modèle (suivie comme précédemment d'un ajustement sur le canevas par similitude) apparaît comme tout à fait audacieuse : 7 valeurs propres de la matrice normale

---

\* Ainsi, s'il s'agit du problème de l'orientation relative pure - et s'il n'y a pas d'inconnues de systématisme, on obtient par ce procédé les mêmes coordonnées spatiales pour les points du modèle à une similitude près que lorsqu'on pose des équations des conditions. S'il y a des inconnues de systématisme, on se trouve dans le 3ème cas : une équation "quasi - déterminée".

sont nulles; de plus 8 autres, celles correspondant aux inconnues de systématisme sont voisines de zéro.

Or cela marche très bien

Couple	Programme classique					Résidus conjugués					B/D ≈ 1/7 E = 1/70
	$\bar{x}$ $\bar{x}_{max}$	$\bar{y}$ $\bar{y}_{max}$	$\bar{z}$ $\bar{z}_{max}$	$\bar{xyz}$ $\bar{xyz}_{max}$	$s_0$	$\bar{x}$ $\bar{x}_{max}$	$\bar{y}$ $\bar{y}_{max}$	$\bar{z}$ $\bar{z}_{max}$	$\bar{xyz}$ $\bar{xyz}_{max}$	$s_0$	
111 A1	13.0 42.8	35.0 88.5	15.9 53.8	40.6 99.8	1.70	10.4 35.1	32.1 78.7	12.6 36.0	36.0 87.1	2.10	B/D ≈ 1/7 E = 1/70
111 A2	11.1 35.9	29.6 79.1	10.3 22.7	33.3 87.7	2.55	11.4 35.5	30.1 82.1	9.7 21.8	33.6 90.2	2.96	B/D ≈ 1/7 E = 1/70
107 A1	5.8 11.5	19.7 44.4	4.4 10.1	21.0 46.1	3.20	6.1 13.0	22.4 52.4	4.7 10.9	22.8 55.0	5.60	B/D ≈ 1/7 E = 1/70
107 A2	8.2 16.6	18.0 37.4	4.6 12.3	20.3 39.8	3.53	8.4 18.0	19.4 41.8	4.5 11.8	21.7 45.0	2.96	B/D ≈ 1/7 E = 1/70

Formation du modèle (basculement et mise à l'échelle effectués ensuite par similitude).

Comparaison des résultats obtenus par une méthode classique et de ceux obtenus par les résidus conjugués (aucune équation de condition, soit 7 valeurs propres de la matrice normale nulle; 8 inconnues de systématisme non déterminables soit 8 autres valeurs propres voisines de zéro).

Unité : le  $\mu\text{m}$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{xyz}$  : écarts moyens quadratiques aux points de contrôle (check-point) ramenés au plan du cliché

$\bar{x}_{max}, \bar{y}_{max}, \bar{z}_{max}, \bar{xyz}_{max}$  : écarts maximaux

$s_0$  : estimation de l'emq des mesures

E échelle moyenne

B/D rapport base/éloignement

Les différences constatées sont de l'ordre de quelques pour cent ; elles peuvent être imputées aux erreurs d'arrondi, à une programmation insuffisamment étudiée, à la limite au principe même de la méthode : car nous n'affirmons pas que la méthode des résidus conjugués fournit en cas d'équation quasi-déterminée des résultats identiques à ceux de méthodes plus classiques, mais seulement des résultats numériquement très voisins. Or quelle que soit la cause des différences constatées, c'est bien le cas ici.

A P P E N D I C E

A - Ce que donne la méthode des résidus conjugués dans le cas d'une équation normale  $A^T A X = A^T K$  indéterminée ou "quasi - déterminée".

----- Dans le cas où l'équation  $A^T A X = A^T K$  est indéterminée, c'est-à-dire quand une ou plusieurs valeurs propres de la matrice  $A^T A$  sont nulles, la méthode fournit théoriquement (c'est-à-dire en l'absence d'erreurs d'arrondi) la solution intrinsèque de l'équation (impossible)  $\underset{n \times p}{A} X = \underset{n}{K}$ , c'est-à-dire la solution normale de norme minimale :

$$X_- = A^- K = (A^T A)^- A^T K \quad (1)$$

$A^-$  désignant l'inverse intrinsèque de  $A$  ( ou inverse de Moore - Penrose :

$$A A^- A = A; A^- A A^- = A^-; A A^- = (A A^-)^T; A^- A = (A^- A)^T ).$$

Ce fait est connu; en voici une démonstration très simple qui a le mérite de laisser voir ce que donne la méthode des résidus conjugués quand on l'applique à la résolution d'une équation  $A^T A X = A^T K$  "quasi - déterminée", autrement dit d'une équation dont la matrice  $A^T A$  comporte un petit nombre de valeurs propres voisines de zéro ou nulles.

Soit  $r$  le rang de  $\underset{n \times p}{A}$  ( $r < p$ ); on peut toujours diagonaliser  $A^T A$ , c'est-à-dire trouver une matrice d'opérateur unitaire  $U$  ( $U U^T = U^T U = I$ ) telle que :

$$A^T A = U^T \Lambda U \text{ avec: } \underset{r \times r}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_r & & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

L'équation  $A^T A X = A^T K$  peut alors s'écrire :

$$\Lambda X' = W \text{ avec: } X' = U X; W = U A^T K \quad (3)$$

ou encore :

$$\begin{matrix} \lambda x' = w \\ 0 y' = 0 \end{matrix} \text{ avec: } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; W = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Il faut alors remarquer [(1) Dufour p.6] que les scalaires  $k_i, l_i, m_i$  qui interviennent dans l'algorithme [§2;(4)] sont des invariants eu égard au changement de base défini par  $U$ , et qu'il en est de même pour les vecteurs dont  $R_i, T_i, S_i$  et  $X_i$  sont les matrices; il revient donc au même d'appliquer l'algorithme à l'équation écrite sous la forme (4); or la solution alors fournie par l'algorithme est - ainsi qu'on le voit immédiatement :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{pmatrix}^- W$$

d'où revenant à la base initiale :

$$X = U^T \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{pmatrix}^{-1} U A^T K = (A^T A)^{-1} A^T K = A^{-1} K \quad (5)$$

— Considérons à présent le cas plus général où l'équation  $A^T A X = A^T K$  est "quasi-déterminée", c'est-à-dire celui où la matrice  $A^T A$  ne comporte qu'un tout petit nombre de valeurs propres voisines de (ou égales à) zéro ; cas très fréquent en pratique, nuisque intervenant chaque fois qu'on rajoute aux inconnues du problème un petit nombre d'inconnues de systématisme destinées à rendre compte de certaines déformations sans savoir si les données dont on dispose sont suffisantes pour les déterminer correctement.

Au lieu, qu'après diagonalisation, on ait l'équation :

$$\Lambda X' = W \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{p-r} & & \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} X' = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

on a maintenant :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{p-r} & & \\ & & & & \varepsilon_1 & \\ & & & & \varepsilon_2 & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & \varepsilon_{p-r} \end{bmatrix} X' = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{p-r} \end{bmatrix}$$

avec  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{p-r}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{p-r}$  infiniment petits

Il est clair alors si on se réfère au cas d'une équation indéterminée ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \nu_1 = \dots = \nu_{p-r} = 0$ ) et si on n'oublie pas que par hypothèse (p-r) est petit devant p quand p est grand, que les r premières séquences de l'algorithme fournissent une suite de solutions approchées  $X'_1, X'_2, \dots, X'_r$  infiniment voisines de celles qu'on obtiendrait si les  $\varepsilon_i$  et les  $\nu_i$  étaient nuls, autrement dit si l'équation était indéterminée et de rang r

Au-delà des r premières itérations, les coefficients  $m_i$  sont en cas de quasi-détermination, quasi-infinis et la solution ne se modifie plus; il n'y a donc rien à craindre.

En conclusion : la résolution par l'algorithme des résidus conjugués d'une équation normale  $A^T A X = A^T K$  à nombre d'inconnues relativement faible (mettons moins de 150), suffisamment creuse (deux conditions assez fréquemment réalisées, qui éliminent les difficultés dues aux erreurs d'arrondi), et quasi-déterminée (seul un tout petit nombre de valeurs propres peuvent avoisiner zéro) donne :

- quand l'équation est indéterminée, la solution intrinsèque  $X = A^{-1} K$
- quand l'équation est quasi-déterminée, une solution numériquement voisine de celle qu'on obtiendrait en annulant les petites valeurs propres de  $A^T A$ , c'est-à-dire en substituant à la matrice  $A^T A = U \Lambda U^T$  ( $\Lambda$  diagonale des valeurs propres) la matrice  $M = U \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 0 \end{pmatrix} U^T$ , et au deuxième membre  $A^T K = U^T W$ , le vecteur  $U^T \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$  ;  
ou encore dans le cas qui nous occupe en supprimant dans la matrice A les colonnes correspondant aux inconnues de systématisme.
- la solution classique quand l'équation est déterminée.

Il y a donc continuité; et c'est certainement avec la simplicité d'emploi ce qui assurera dans l'avenir une place importante à ce type de méthode.

B) Théorie des moindres carrés, méthode des résidus conjugués et équation d'observation "quasi-déterminée"

1) Considérons d'abord le cas limite : une équation d'observation indéterminée :

$$\underset{p \times p}{\hat{A}} \underset{p \times 1}{\bar{X}} = \underset{p \times 1}{L} - \underset{p \times 1}{\bar{e}} \quad \text{avec : } \text{rang } A = r < p \quad (1)$$

( $\bar{e}$ : vecteur erreur;  $\bar{X}$ : inconnue ( $p$  composantes);  $L$ : observation)

On a l'habitude classiquement pour lever l'indétermination, de poser  $p-r$  conditions indépendantes, qu'on peut toujours écrire moyennant un choix convenable de la solution approchée sous la forme :

$$B\bar{X} = 0 ; \text{ avec } \text{rang } B = p-r ; \text{ rang } A(I-B^{-1}B) = r \quad (2)$$

La solution optimale (l'estimateur sans biais à variance minimale) est alors\*\* (nous supposons pour simplifier ici que la variance des observations est scalaire) :

$$\bar{X} = [A(I-B^{-1}B)]^{-1} L \quad (3)$$

( $M^{-1}$  désignant comme au § A l'inverse intrinsèque de  $M$ ).

L'estimateur optimal de toute quantité fonction des quantités observées, c'est-à-dire après linéarisation de la forme  $\bar{Y} = C\bar{L} = CA\bar{X}$  est alors :

$$\bar{Y} = C\bar{L} = CA\bar{X} = CA[A(I-B^{-1}B)]^{-1} L \quad (4)$$

Or actuellement on sait qu'on peut procéder autrement : ne pas écrire l'équation de condition (2) et adopter pour  $\bar{X}$  la solution (qui est encore l'estimation sans biais à variance minimale).

$$\bar{X}_- = A^{-1}L \quad (5)$$

car alors, remarque essentielle, l'estimateur optimal de toute quantité fonction des quantités observées  $\bar{L}$ , c'est-à-dire de la forme  $\bar{Y} = C\bar{L} = CA\bar{X}$  est exactement de même forme \*\*\* :

$$\bar{Y} = C\bar{L} = CAA^{-1}L = CA[A(I-B^{-1}B)]^{-1} L \quad (6)$$

C'est l'une des pierres angulaires de ce court article. Que signifie-t-elle en effet ? que toute grandeur attachée à la figure à décrire (ici la figure formée par les deux gerbes perspectives au moment de la prise de vue) et qui peut s'exprimer uniquement en fonction des quantités observées (par exemple pour le problème de l'orientation relative les grandeurs observées sont les coordonnées-cliché des points-images et les grandeurs à déterminer les coordonnées spatiales XYZ des points-objets à une similitude près) est estimée de même façon dans les deux cas.

\* Entendre dont la matrice écart-type  $\sigma_{\bar{X}}$  est de norme euclidienne minimale ( $\|\sigma_{\bar{X}}\|$  minimal  $\Leftrightarrow$  Trace  $\sigma_{\bar{X}}^2$  minimale)

\*\* Voir (3)

\*\*\* Voir (3)

La démonstration de ce résultat repose sur les deux propriétés suivantes faciles à démontrer :

- Si  $S$  est symétrique et indempotente ( $S^2=S$ ) :  $S(AS)^{-1} = (AS)^{-1}$
- $\text{rang } AS = \text{rang } A \Leftrightarrow (AS)(AS)^{-1} = AA^{-1}$

L'écriture d'équations de condition (ou de pseudo-équations d'observation) pour lever une indétermination éventuelle est donc totalement inutile théoriquement, mais aussi grâce à la méthode des résidus conjugués pratiquement.

Il y a donc non seulement simplification théorique mais simplification pratique : allègement considérable de la programmation qui couvre désormais à la fois le cas d'une équation déterminée et celui d'une équation indéterminée.

qui couvre aussi celui d'une équation quasi-déterminée, en effet :

- 2) Considérons à présent une équation  $A \dot{X} = L - \dot{c}$  quasi-déterminée, autrement dit telle d'après notre définition que la matrice  $A^T A$  ne comporte lorsque  $p$  est grand (mais inférieur à 150) qu'un petit nombre de valeurs propres voisines de zéro (ou nulles).

D'après la remarque faite au § A, la solution fournie par l'algorithme des résidus conjugués sera numériquement très voisine de celles obtenue en annulant toutes les valeurs propres voisines de zéro; autrement dit les estimations des quantités fonctions des grandeurs observées seront très voisines numériquement de celles qu'on aurait obtenues en modifiant le nombre ou le choix des inconnues de façon à traiter une équation déterminée.

#### Bibliographie

- (1) Dufour - 1967 - La résolution des systèmes linéaires par la méthode des résidus conjugués (I.G.N. - documentation technique)
- (2) J. Delmoitié - 1975 - La résolution des systèmes d'équations par approximations successives (I.G.M. - Bruxelles)
- (3) Hottier - 1977 - Théorie des moindres carrés généralisés (I.G.N. - documentation technique).